RSAY
rie A. N°
N° D'ordre
179

THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS XI
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

FERNANDO-MADAPPULIARATCHIGE Upali

SUJET DE LA THÈSE : CONTRIBUTIONS A L'ÉTUDE DES CONTRAINTES D'ORIGINE THERMIQUE DANS LES MILIEUX CONTINUS ISOTROPES HÉTÉROGÈNES

Soutenue le 23 Novembre 1972 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

M. MAZET — Président

MM. SIESTRUNCK — Examinateurs
ABSI
BONVALET

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS XI
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR-INGENIEUR

par

FERNANDO-MADAPPULIARATCHIGE Upali

SUJET DE LA THESE : CONTRIBUTIONS A L'ETUDE DES CONTRAINTES D'ORIGINE THERMIQUE DANS LES MILIEUX CONTINUS ISOTROPES HETEROGENES

Soutenue le 23 Novembre 1972

DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN :

M. MAZET - Président

MM. SIESTRUNCK - Examinateurs
ABSI
BONVALET

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Qu'il me soit permis d'exprimer mes sincères remerciements à M. Le Professeur MAZET pour m'avoir orienté vers la mécanique des solides, et indiqué l'orientation générale de cette thèse. Je suis très honoré de sa présence à la présidence de la commission d'examen.

Cette étude est dérivée d'un programme de recherche en analyse expérimentale des contraintes thermiques que poursuit la Division de Résistance des Matériaux Expérimentale du C.E.B.T.P., sous la direction de M. BONVALET. J'exprime ici ma profonde reconnaissance à M. BONVALET qui m'ayant proposé, il y a près d'un an et demi, la méthode de défigeage, la base de cette étude, n'a pas cessé de m'enrichir de ses conseils précieux et de l'encouragement indispensable à l'aboutissement de cette recherche.

La résolution théorique de ce problème a été supervisée par M. ABSI auquel j'adresse mes profonds remerciements.

Je suis reconnaissant à M. Le Professeur SIESTRUNCK de l'Université de PARIS VI de m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie de la commission d'examen.

Je suis également reconnaissant à M. WIANECKI, Chef de la Division Aérodynamique des Bâtiments et des Ouvrages d'Art du C.E.B.T.P. pour les nombreux conseils et suggestions qu'il m'a fourni tant en photoélasticimétrie qu'en élasticité et qui m'ont été précieux.

De nombreux amis et collègues à la fois au laboratoire de mécanique des solides d'Orsay de l'Université de PARIS XI, et au sein des services R.M.E. Calcul, D.G.R., S.A.T.T.E.C. et S.E.S. du C.E.B.T.P., m'ont aidé dans l'accomplissement des différentes phases de l'étude. Je les prie de trouver ici l'expression de ma gratitude. Je suis reconnaissant à Mme BASSET, en particulier, pour l'excellente frappe et mise en page.

Enfin, j'exprime ma profonde reconnaissance au Gouvernement Français et à l'Union Technique Interprofessionnelle de m'avoir offert des bourses qui m'ont permis d'entreprendre cette étude.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543516_0137

NOTATIONS

c	: chaleur massique
e	; épaisseur du milieu continu plan
E	: module d'élasticité
E_i^n, F_i^n, G_i^n	: composantes du champ de déformations agissant sur la surfa extérieure, $i = 1, 2, 3$
f	: fonctionnelle regroupant les nombres adimensionnels, indic repérant le fluide environnant
h	: coefficient de transmission calorifique superficielle (en échange thermique par convection)
i	: indice repérant la couche inférieure
k	: diffusivité thermique
L	: dimension linéaire type
m	: indice repérant le modèle
M	: moment fléchissant en flexion pure
n_i	: composantes du vecteur unitaire agissant sur la surface extérieure ; valeur de frange
p', q'	: composantes de contraintes principales secondaires dans le plan x_1 x_2
r	: indice repérant la $r^{ème}$ couche
s	: indice repérant soit la couche supérieure, soit la surface du solide
t	: temps
T	: température absolue
u_i	: composante des déplacements en milieu tridimensionnel
u, v	: composantes des déplacements parallèle et perpendiculaire à l'interface dans les milieux continus multicouches
X_i, Y_i, Z_i	: composantes de forces massiques, $i = 1, 2, 3$
α	: coefficient de dilatation thermique
η	: $\frac{E\,\alpha}{1 - 2\,\nu}$
ϵ	: déformation thermique libre égale soit à $\alpha.\theta$ soit à $\int_0^{\theta=\theta_1} \alpha(\theta)\,d\theta$
ϵ'	: $\epsilon - \epsilon_0$
ϵ_0	: une valeur extrême de ϵ dans le domaine qu'occupe le corps

.../.

η : $\frac{E}{1-2\nu}$ en élasticité tridimensionnelle et $\frac{E}{1-\nu}$ en régime de contraintes planes

η : variable muette

θ : variation de température à partir de l'état initial non-contraint

λ : constante de Lamé, conductibilité thermique

μ : constante de Lamé

ν : coefficient de Poisson

ρ : densité du fluide environnant en convection libre

σ_{ij} : composante des contraintes : i, j = 1, 2, 3

ϕ : fonction de contrainte; fonctionnelle regroupant les nombres adimensionnels

ψ : fonction de contrainte ; fonctionnelle regroupant;les nombres adimensionnels

ω : vitesse de circulation du fluide en convection forcée

SYMBOLES ET OPERATEURS MATHEMATIQUES

La notation indicielle et la convention de sommation d'Einstein sont employées dans le texte.
Les indices i, j, k prennent les valeurs soit 1,2, soit 1, 2, 3 soit x, y.

δ_{ij} : symbole de Kronecker = 0 i $\neq$ j
= 1 i = j

∇^2 : opérateur Laplacien en deux dimensions $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

∇^4 : opérateur biharmonique : $\nabla^2 . \nabla^2$

Les paramètres d'isoclines sont exprimés en grades.

S O M M A I R E

PREMIERE PARTIE : INTRODUCTION ET RESOLUTION THEORIQUE DU PROBLEME THERMOELASTIQUE DU MILIEU CONTINU, PLAN, ISOTROPE, HETEROGENE

Page

CHAPITRE 1 - Introduction et but de l'étude..... 1
1.1. Hétérogénéité des milieux solides..... 1
1.2. Champs thermiques rencontrés en pratique..... 5
1.3. Contraintes d'origine thermique..... 8
1.4. But et plan de l'étude..... 9
1.5. Aperçu sur les tentatives théoriques antérieures d'étude des contraintes thermiques dans les milieux hétérogènes..... 9
1.5.1. Milieux continus initialement hétérogènes.... 9
1.5.2. Milieux continus à sensibilité thermique..... 10

CHAPITRE 2 - Etude théorique des contraintes d'origine thermique dans les milieux continus plans, isotropes et hétérogènes au moyen d'une fonction de contrainte de type Airy..... 12
2.1. Définition précise du problème traité..... 12
2.2. Introduction d'une fonction de contrainte et établissement de la condition de compatibilité..... 14
2.3. Résolution numérique par la méthode des différences finies..... 16
2.3.1. Résolution numérique pour le milieu continu stratifié plan..... 16
2.3.2. Résolution numérique pour le milieu monocouche à caractéristiques mécaniques et thermiques sensibles à la température..... 17
2.4. Obtention d'un module d'élasticité équivalent variable en fonction de la raideur du milieu plan... 19
2.5. Influence du coefficient de Poisson sur le champ de contraintes d'origine thermique dans les milieux continus hétérogènes..... 20
2.5.1. Rappel des résultats d'élasticité linéaire et méthode adoptée dans la présente étude..... 20
2.5.2. Influence du coefficient de Poisson sur le champ de contraintes dans un milieu multicouche plan isotrope..... 23

DEUXIEME PARTIE : ETUDES THEORIQUES ET EXPERIMENTALES PRELIMINAIRES AUX EXPERIENCES EN MILIEUX CONTINUS HETEROGENES

Page

CHAPITRE 3 - Photothermoélasticimétrie directe et limitations générales..... 31
3.1. Photothermoélasticimétrie..... 31
3.2. Limitations générales des techniques photothermoélasticimétriques directes dans l'étude d'un milieu isotrope homogène..... 32
3.2.1. Perturbation des champs d'isochromes et d'isoclines par le dispositif de mesure de la température..... 33
3.2.2. Influence de la dépendance thermique des propriétés mécaniques, optiques et physiques du matériau du modèle..... 33
3.2.3. Influence de la dépendance thermique et temporelle des caractéristiques thermiques du matériau photoélasticimétrique sur l'obtention de la similitude de température..... 41
3.3. Conclusions partielles..... 41
CHAPITRE 4 - Méthode de défigeage des déformations thermiques libres. 44
4.1. Description de la méthode..... 44
4.2. Base théorique de la méthode générale..... 44
4.3. Quelques remarques..... 49
4.3.1. Le choix des éléments..... 49
4.3.2. Influence de la valeur du coefficient de Poisson..... 50
4.3.3. Régime de contraintes planes..... 50
4.3.4. Compatibilité géométrique des déformations initiales $e_{ij} = -\epsilon' \delta_{ij}$ figeables..... 50
4.4. Méthode du champ de déformation unitaire..... 52
4.5. Méthode particulière de défigeage de déformations thermiques libres applicables au milieu stratifié plan ou spatial..... 53
4.5.1. Extension au régime de contraintes planes généralisées..... 57
4.6. Position actuelle de la méthode..... 58
4.7. Choix des matériaux soumis au défigeage sur la base du coefficient de mérite..... 58

Page

CHAPITRE 5 - Mise au point des techniques de défigeage..... 60

5.1. Première série d'essais : conditions d'utilisation des matériaux photoélasticimétriques.... 60

5.1.1. Etude de la possibilité d'utilisation des résines époxydes Hysol 4290 et Araldite D pour les essais de défigeage..... 60

5.1.2. Evaluation des caractéristiques photoélasticimétriques, mécaniques du matériau à la température de figeage..... 61

5.1.3. Mise au point des programmes de figeage et de défigeage..... 61

5.1.4. Etude de la validité et de la fiabilité de la méthode..... 62

5.2. Deuxième série d'essais : Influence des biréfringences parasites..... 63

5.2.1. Méthode suivie..... 63

5.2.2. Influence des biréfringences dues à l'usinage..... 63

5.2.3. Influence des biréfringences dues au collage..... 65

5.2.4. Influence des biréfringences dues au vieillissement (effet de bord)..... 65

5.3. Conclusions partielles..... 66

TROISIEME PARTIE - ANALYSE EXPERIMENTALE DU MILIEU CONTINU PLAN ISOTROPE NON-HOMOGENE

CHAPITRE 6 - Analyse expérimentale des contraintes d'origine thermique dans les milieux continus finis stratifiés plans..... 67

6.1. Critiques des tentatives d'essais photothermoélasticimétrique direct sur les milieux continus finis stratifiés plans..... 67

6.2. Contraintes d'origine thermique dans un milieu continu fini isotrope tricouche dont les couches diffèrent uniquement par la valeur du coefficient de dilatation thermique constante pour chaque couche, lors d'une variation uniforme de la température de l'ensemble..... 69

Page

6.3. Particularités des contraintes d'origine thermique au niveau de l'interface dans un milieu continu stratifié plan et fini..... 73
6.4. Séparation des contraintes au niveau de l'interface par extrapolation..... 75
6.5. Contraintes d'origine thermique dans un milieu continu fini tricouche plan dont les couches diffèrent l'une de l'autre par les valeurs constantes pour chaque couche du module d'élasticité et du coefficient de dilatation thermique lors d'une variation de température constante pour chaque couche mais variant de l'une à l'autre..... 79
6.6. Contraintes d'origine thermique dans un milieu continu fini plan tricouche pour lequel :
- le module d'élasticité varie d'une couche à l'autre et varie à l'intérieur d'une même couche
- le coefficient de dilatation thermique et la variation de température varient d'une couche à l'autre, mais sont constants dans chaque couche
- le coefficient de Poisson est constant pour les 3 couches..... 85
6.7. Résultats théoriques et expérimentaux..... 92
CHAPITRE 7 - Analyse expérimentale des contraintes d'origine thermique dans les milieux monocouches isotropes plans finis à caracteristiques thermo-mécaniques sensibles à la température..... 93
7.1. Tentatives expérimentales antérieures..... 93
7.2. Méthode de résolution expérimentale du problème thermoélastique plan au milieu à sensibilité thermique..... 95

7.3. Contraintes thermiques dans un milieu plan monocouche dont le coefficient de dilatation thermique varie en fonction de la température suivant une loi exponentielle..... 98
7.3.1. Réalisation expérimentale..... 98
7.4. Contraintes d'origine thermique dans un milieu plan monocouche dont le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique sont sensibles à la température..... 103
7.4.1. réalisation expérimentale..... 103
7.5. Résultats théoriques et expérimentaux..... 108
CHAPITRE 8 - Analyse expérimentale des contraintes d'origine thermique dans les milieux continus tridimensionnels stratifiés finis..... 109
8.1. Photothermoélasticimétrie directe tridimensionnelle..... 109
8.1.1. Méthode du polariscope encastré..... 109
8.1.2. Méthode de la lumière diffusée..... 110
8.1.3. Conclusions partielles..... 111
8.2. Contraintes d'origine thermique dans un bloc parallélépipédique tricouche lors d'une variation uniforme de la température..... 112
8.2.1. Réalisation expérimentale..... 112
8.2.2. Résolution des contraintes agissant sur le plan de symétrie..... 115
8.2.3. Résolution des contraintes agissant sur un plan général perpendiculaire au plan d'interface..... 115
8.3. Contraintes d'origine thermique dans un corps cylindrique long bicouche lors d'une variation uniforme de la température..... 120
8.3.1. Réalisation expérimentale..... 120
8.4. Résultats théoriques et expérimentaux..... 127

Page

CHAPITRE 9 - Conclusions..... 128

Bibliographie citée..... 135

Annexe I - Conditions de similitude pour les champs thermiques dans les solides isotropes..... 141

Annexe II- Extension de l'analogie de Duhamel au milieu continu isotrope non-homogène..... 144

Annexe III-La forme en différences finies des équations aux dérivées partielles, relatives au milieu continu plan isotrope et hétérogène..... 148

PREMIERE PARTIE : INTRODUCTION ET RESOLUTION THEORIQUE DU PROBLEME THERMOELASTIQUE DU MILIEU CONTINU, PLAN, ISOTROPE, HETEROGENE

Page

CHAPITRE 1 - Introduction et but de l'étude..... 1

1.1. Hétérogénéité des milieux solides..... 1
1.2. Champs thermiques rencontrés en pratique..... 5
1.3. Contraintes d'origine thermique..... 6
1.4. But et plan de l'étude..... 7
1.5. Aperçu sur les tentatives théoriques antérieures d'étude des contraintes thermiques dans les milieux hétérogènes..... 9
1.5.1. Milieux continus initialement hétérogènes..... 9
1.5.2. Milieux continus à sensibilité thermique..... 10

CHAPITRE 1 - INTRODUCTION ET BUT DE L'ETUDE

1.1. Hétérogénéité des milieux solides

La conception des ouvrages d'art et des structures mécaniques modernes, soumis à de nombreuses et diverses conditions, oblige l'ingénieur d'étude à un choix optimal des matériaux structuraux dont il dispose sur la base de la spécificité de leurs propriétés. Ainsi, naissent structures composites et autres solides non-homogènes parmi les conceptions structurales.

Par exemple, les pistes d'aéroports et de chaussées routières sont conçues comme des milieux multicouches dont les différentes couches possèdent des caractéristiques physico-mécaniques, telles que les modules d'élasticité dans le cas des chaussées rigides, ou la finesse des pierres cassées dans le cas des chaussées flexibles, qui sont optimisées sur la base de l'atténuation des contraintes suivant la profondeur de type Boussinesq. L'utilisation de pièces hétérogènes dans la conception des structures aéronautiques et aérospatiales est absolument nécessaire lorsque une sollicitation thermique d'ordre extrême apparaît. Un exemple typique est fourni par la construction "en sandwich" des panneaux et des coques, qui peuvent être amenés à posséder des caractéristiques exceptionnelles de légèreté, d'amortissement, de stabilité et d'isolation thermique, en fonction du choix des couches composantes [57] . L'hétérogénéité existe inéluctablement dans les massifs en béton tels que les grands barrages quand la construction s'effectue par bétonnages en couches successives. L'écorce terrestre est hétérogène du fait de la stratification par inhérence.

Les températures extrêmes atteintes lors de l'utilisation des techniques cryogéniques (au-delà de - 137°C utilisé dans l'industrie automobile pour le cryofrettage, en médecine, etc...), lors de l'échauffement aérodynamique des aéronefs et des véhicules spatiaux, dans les réacteurs nucléaires, engendrent un nouveau domaine d'hétérogénéité créé par la dépendance thermique au-delà d'une certaine limite de température, des caractéristiques thermiques et mécaniques des matériaux structuraux .[37]

.../...

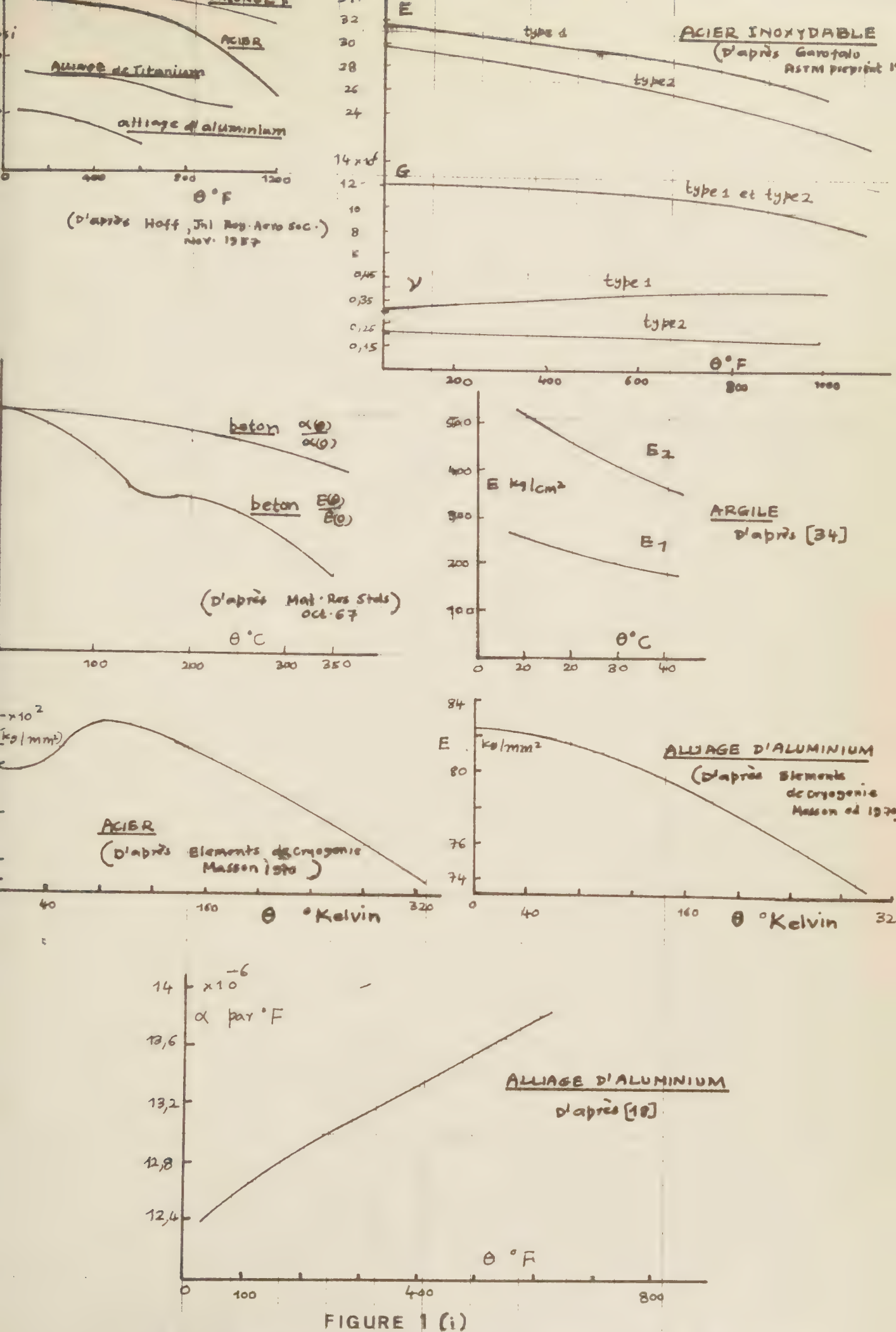


FIGURE 1 (i)

DEPENDANCE THERMIQUE DES CARACTERISTIQUES MECANIQUE ET HERMIQUE DE QUELQUES MATERIAUX

Par conséquent, un corps homogène aux températures modérées se transforme en un corps hétérogène sous l'action d'un champ thermique non-uniforme d'ordre extrême. Nous reproduisons dans les figures 1(i) l'allure des variations thermiques du module d'élasticité, du coefficient de Poisson et du coefficient de dilatation thermique de l'acier, de l'aluminium et des bétons. Le sol dans ses diverses formes possède un module d'élasticité sensible, même aux variations modérées de température, A titre d'exemple, nous reproduisons dans la figure 1 (i) la sensibilité thermique de deux modules d'élasticité utilisés pour représenter le comportement viscoélastique d'un type d'argile [34]. On notera des diminutions respectivement d'environ 27 et 34 % des deux modules dans une intervalle de température de 10 et 40°C.

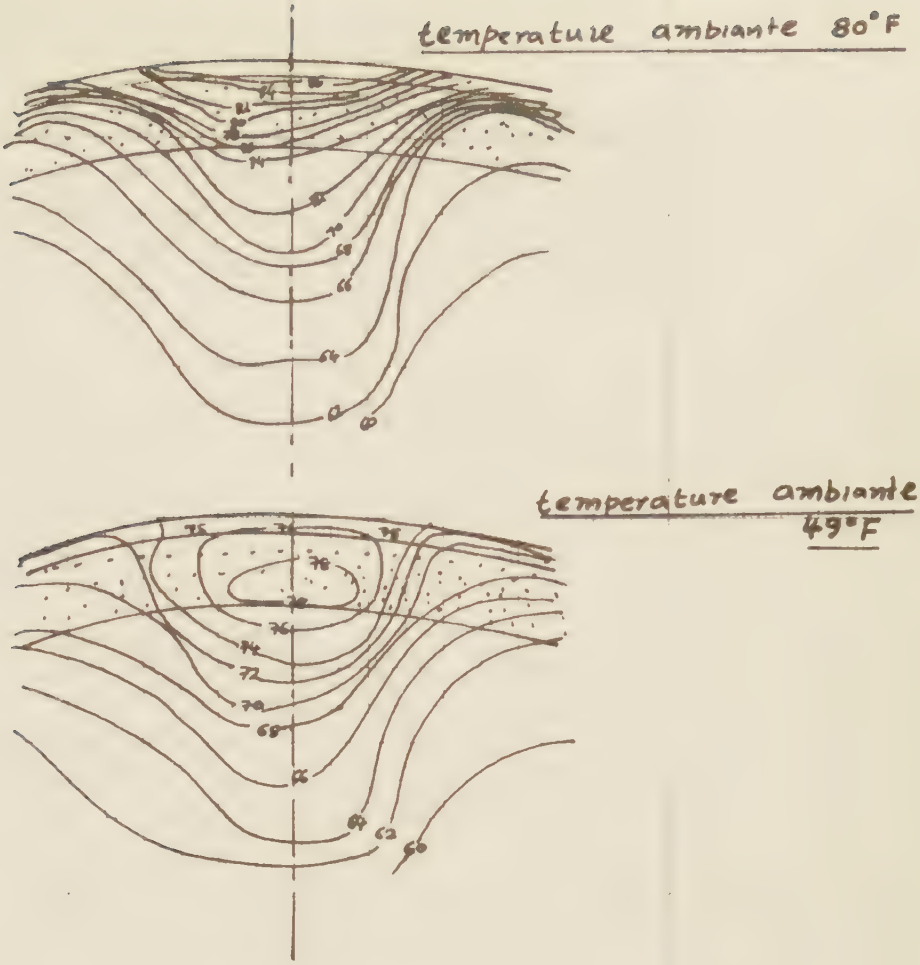


FIGURE 1 (ii)

ISOTHERMES POUR UN SYSTEME SOL - CHAUSSEE
D'après [34]

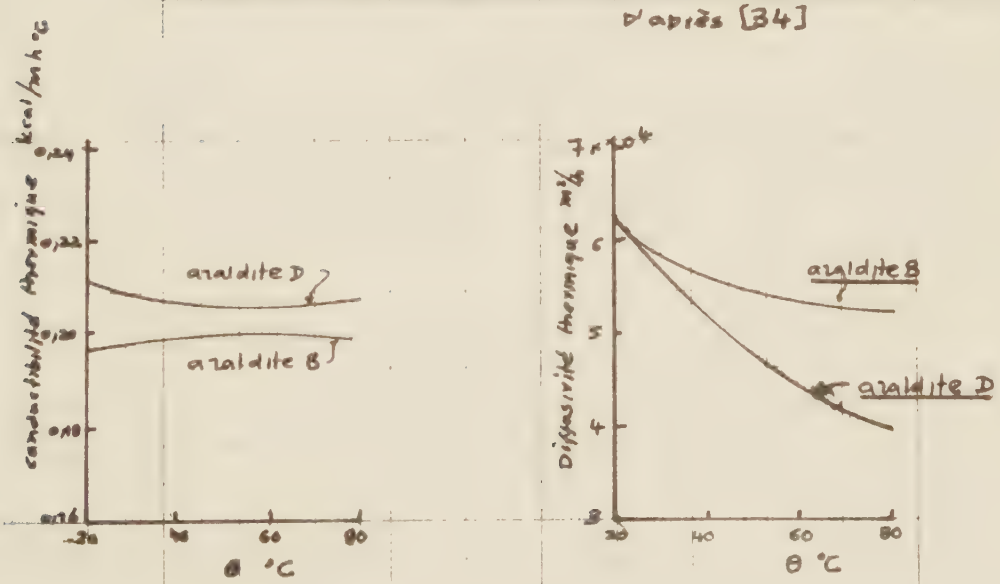


FIGURE 3.2.3. (j)

DEPENDANCE THERMIQUE DES CARACTERISTIQUES THERMO-PHYSIQUES DE DEUX MATERIAUX DE MODELE (D'APRES NILL B. ET al - MATERIAL PRUFUNG N°6.1970)

1.2. Champs thermiques rencontrés en pratique

Les conditions climatiques et saisonnières sont les facteurs principaux de naissance d'un champ thermique dans les ouvrages d'art. La figure 1 (ii) montre ainsi la répartition de température observée au-dessous d'un système de chaussée-sol, en présence de deux modes de sollicitations climatiques.

Un environnement thermique de l'ordre de 1000°C pendant le fonctionnement et des vitesses thermiques transitoires, de l'ordre de 15 - 500°C/s lors du démarrage et du stoppage, se produisent dans les réacteurs nucléaires à haute vitesse.[55]

Une élévation de température de l'ordre de 40°C due à l'éxothermicité du matériau pendant le séchage, a été observée dans des massifs en béton. Elle persiste, en vertu de la faible conductibilité du béton, et le risque de fissuration demeure, par conséquent, pendant un intervalle de temps très long.

Le champ thermique qu'impose l'échauffement aérodynamique des aéronefs et des véhicules spatiaux, est bien connu. [22] Nous rappelerons simplement que des températures de l'ordre de 2500° K et des vitesses d'échauffement d'environ 100 - 150 kw/cm^2 sont prévisibles lors de l'entrée dans l'atmosphère jupitérienne.[52] D'autre part, les températures de l'ordre de 500°C se produisent au niveau de l'interface ablateur - isolateur malgré l'absorption de la chaleur par l'ablation lors de la rentrée dans l'atmosphère. Rappelons que ce même système est soumis à des températures de l'ordre de ± 250°C au cours de son séjour dans l'espace.[7]

1.3. Contraintes d'origine thermique

Les contraintes d'origine thermique apparaissent dans les milieux solides lorsque la déformation thermique libre isotrope qui est égale au produit $\epsilon = \alpha \cdot \theta$, α et θ désignant respectivement le coefficient de dilatation thermique et la variation de température à partir de l'état naturel non-contraint, est entravée en totalité ou en partie. L'entrave totale provient de la nature des appuis extérieurs. La répartition spatiale non-uniforme de la déformation thermique libre ϵ ou la connectivité multiple du solide entrainera des éléments voisins à s'entraver partiellement.

Le milieu isotrope hétérogène le plus simple, celui dont seul le coefficient de dilatation thermique α est une fonction de coordonnées spatiales sera le siège des contraintes sous l'action d'une variation uniforme de température θ même si ses bords sont libres de se déplacer. Rappelons toutefois, que si le milieu solide est de connexion simple et la fonction du coefficient de dilatation thermique $\alpha = \alpha\ (x, y, z)$ est linéaire par rapport aux coördonnées cartésiennes, des contraintes thermiques ne s'y produisent pas lors de la présence d'une variation uniforme de température. Il en est de même dans un milieu plan à connexion simple dont la répartition du coefficient de dilatation thermique est harmonique plane, à savoir : $\nabla^2 \alpha = 0$

Les contraintes dues au retrait, qui se produisent dans les structures en béton, pendant le séchage, sont du même type que les contraintes d'origine thermique. Le coefficient du retrait égal au retrait par unité de longueur jouant le rôle de la déformation thermique libre $\alpha\theta$.

1.4. But et plan de l'étude

Nous aborderons dans ce travail l'étude des contraintes d'origine thermique dans les milieux continus isotropes hétérogènes de dimensions finies. L'hétérogénéité est entendue dans le sens macroscopique du terme, à savoir que les caractéristiques thermiques et mécaniques telles que le module d'élasticité, le coefficient de Poisson, le coefficient de dilatation thermique sont des fonctions continues, connues des coordonnées spatiales. La continuité des déformations et des contraintes dans le milieu solide, nécessite la continuité de ces fonctions et de leurs dérivées premières. Si une des fonctions possède seulement une continuité par morceaux, on disposera d'un milieu stratifié continu.

Nous nous bornerons au problème thermoélastique non-couplé et quasi-stationnaire du milieu hétérogène dans le cadre de l'élasticité linéaire. Ce faisant, nous négligeons le couplage entre le champ de déformation et le champ thermique et l'effet dynamique dans le champ de déplacements. Un tel problème thermoélastique peut être divisé en deux parties distinctes [5], . L'évaluation du champ thermique à partir des conditions aux limites thermiques et ensuite, le calcul des contraintes thermiques à partir du champ thermique. Nous ne nous préoccuperons que de la deuxième partie, le champ thermique étant présumé connu. Les conditions aux limites de chargement sur le milieu fini sont supposées présentes sous formes d'efforts sur les contours extérieurs qui sont pris égaux à zéro.

Le problème plan de thermoélasticité du milieu continu hétérogène est formulé sous forme d'une fonction de contrainte de type Airy. Il est résolu numériquement sous les conditions aux limites, par la méthode des différences finies (chapitre 2). Les milieux multicouches plans et les milieux plans à caractéristiques thermiques et mécaniques sensibles à la température sont ainsi traités. D'autre part, nous étudions l'influence du coefficient de Poisson sur le champ de contraintes d'origine thermique dans le 2e problème aux limites de thermoélasticité du milieu multicouche qui est homogène par morceaux. (Chapitre 2 - paragraphe 2.5).

.../...

L'étude expérimentale des contraintes d'origine thermique dans les milieux hétérogènes nous renvoie à l'examen critique des méthodes photothermoélasticimétriques (chapitre 3). La méthode de défigeage de déformations thermiques libres s'appuie sur une théorie explicitée dans le chapitre 4, qui nous permet de formuler analytiquement les différentes phases de la méthode. Afin de pouvoir utiliser cette méthode, nous procédons à la mise au point des techniques de défigeage et à la caractérisation de deux résines époxydes au point de vue de leur usage dans les essais (chapitre 5).

Elle est appliquée à l'étude expérimentale des contraintes d'origine thermique dans le milieu continu plan stratifié (chapitre 6), dans le milieu plan monocouche à caractéristiques thermiques et mécaniques sensibles à la température (chapitre 7) et dans le milieu tridimensionnel stratifié (chapitre 8).

La comparaison entre la théorie et l'expérience se fait du point de vue des champs de contraintes d'une part au niveau de l'interface, en vertu de son importance dans la résistance des milieux stratifiés continus, et d'autre part suivant des sections générales perpendiculaires aux interfaces. Les résultats du milieu à caractéristiques thermiques et mécaniques sensibles à la température sont comparés au droit des sections où le champ thermique est optimal.

1.5. Aperçu sur les tentatives théoriques antérieures à l'étude des contraintes thermiques dans les milieux hétérogènes

Les équations d'équilibre exprimées en fonction des composantes des déplacements u_i, $i = 1, 2, 3$ pour un milieu continu hétérogène s'écrivent

$$\lambda_{,i}\,(u_{ji,j}) + \lambda u_{j,ji} + \mu_{,j}\,(u_{i,j} + u_{j,i}) + \mu\,(u_{i,jj} + u_{j,ij})$$

$$+ X_i - (\gamma)_{,i} = 0 \qquad 1.5.(1)$$

$$i,j = 1, 2, 3$$

Avec : λ, μ = constantes de Lamé

X_i = force massique

et $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\,\alpha\theta$ pour un milieu initialement hétérogène

$= (3\lambda + 2\mu)\int_0^{\theta} \alpha(\eta)\,d\eta$ pour un milieu à sensibilité thermique

Elles constituent un système d'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre à coefficient variable. La résolution de cette expression sous forme de déplacements ou sous forme de potentiel de déplacement a été faite à partir de nombreuses hypothèses simplificatrices telles que l'incompressibilité élastique ($\nu = 1/2$), la symétrie axiale ou sphérique etc..., qui transforment le système d'équation 1.5 (1) en une forme simple. [37] [38]

Divisons le problème en deux catégories, à savoir celui du milieu initialement hétérogène et celui du milieu à sensibilité thermique.

1.5.1. Milieux continus initialement hétérogènes

Nous regroupons sous ce titre les milieux multicouches qui sont hétérogènes indépendamment des conditions d'environnement.

.../....

Le problème des contraintes d'origine thermique dans la poutre tricouche a été résolue par Eringen en utilisant la méthode de l'énergie de déformation [13]. Gatewood donne la solution analytique pour un corps cylindrique multicouche long en régime de déformation plane, à partir de la méthode de variable complexe. [18]

Plusieurs problèmes à symétrie axiale et symétrie spérique (donc unidimensionnel) ont été abordés. Notons parmi le grand nombre de problèmes de coques, celui des coques cylindriques tricouches à noyau rigide [58] et des coques sphériques. [24] [29]

En se servant du potentiel de déplacement et d'une fonction de contraintes, Fen et al obtiennent une solution approchée par séries trigonométriques et hyperboliques pour un milieu continu plan multicouche de longueur finie dont le coefficient de dilatation thermique, le module d'élasticité et le coefficient de Poisson sont homogènes par morceaux sous l'effet d'un champ thermique harmonique. Ils ignorent la singularité de contraintes au coin d'interface. [14]

1.3.2. Milieux continus à sensibilité thermique

La résolution du problème du milieu à sensibilité thermique a été abordée sous les hypothèses simplificatrices, soit de l'incompressibilité élastique, soit de la symétrie axiale ou sphérique notamment par les techniques de perturbation de Poincaré.

Hilton traite le problème axisymétrique du cylindre épais en déformation plane et de la plaque circulaire en contrainte plane pour un matériau incompressible. [20]

Les techniques de perturbations de Poincaré, sont appliquées par Trostel au problème axisymétrique du cylindre [54], par Nowinskii au problème de la sphère [39], au problème du milieu infini à symétrie axiale [41] et au problème du milieu infini à symétrie sphérique [40]

.../...

la résolution suppose l'incompressibilité élastique ($\nu = 1/2$). Parida et Das traitent [43] le problème de la sphère dans un champ thermique périodique à symétrie sphérique sous l'hypothèse de l'incompressibilité élastique et les lois linéaires de dépendance thermique du module d'élasticité et du coefficient de dilatation thermique. Sokolowskii [50] traite le problème unidimensionnel pour les coques minces sphériques et cylindriques en matériau incompressible.

Les techniques de perturbation à paramètre multiple ont été utilisées par Ismail et Nowinskii pour traiter le problème des coques minces à symétrie axiale et à symétrie sphérique pour des lois générales de variation thermique du coefficient de Poisson, du module d'élasticité et du coefficient de dilatation thermique. [23]

Page

CHAPITRE 2 - Etude théorique des contraintes d'origine thermique dans les milieux continus plans, isotropes et hétérogènes au moyen d'une fonction de contrainte de type Airy..... 12

2.1. Définition précise du problème traité..... 12
2.2. Introduction d'une fonction de contrainte et établissement de la condition de compatibilité.. 13
2.3. Résolution numérique par la méthode des différences finies..... 16
2.3.1. Résolution numérique pour le milieu continu stratifié plan..... 16
2.3.2. Résolution numérique pour le milieu monocouche à caractéristiques mécaniques et thermiques sensibles à la température.... 17
2.4. Obtention d'un module d'élasticité équivalent variable en fonction de la raideur du milieu plan 19
2.5. Influence du coefficient de Poisson sur le champ de contraintes d'origine thermique dans les milieux continus hétérogènes..... 20
2.5.1. Rappel des résultats d'élasticité linéaire et méthode adoptée dans la présente étude 20
2.5.2. Influence du coefficient de Poisson sur le champ de contraintes dans un milieu multicouche plan isotrope..... 23

CHAPITRE 2 - ETUDE THEORIQUE DES CONTRAINTES D'ORIGINE THERMIQUE DANS LES MILIEUX CONTINUS PLANS, ISOTROPES ET HETEROGENES AU MOYEN D'UNE FONCTION DE CONTRAINTES DE TYPE AIRY

2.1. Définition précise du problème traité

Nous nous bornerons au milieu continu plan à connexion simple, dont le module d'élasticité E, le coefficient de Poisson ν, le coefficient de dilatation thermique α et l'épaisseur perpendiculaire au plan (e) sont des fonctions continues d'un système de coordonnées cartésiennes plan par rapport auquel nous nous repérons.

Donc on a :

$$E = E(x, y)$$
$$\nu = \nu(x, y)$$
$$\alpha = \alpha(x, y)$$
$$e = e(x, y)$$

La continuité des champs de déplacements (u, v) et des contraintes dans le milieu continu $(\sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ nécessite la continuité de chacune de ces fonctions et de leurs dérivées premières.

Si une des fonctions était continue par morceaux, ce serait un milieu continu stratifié (voir paragraphe 2.3.1.). Les conditions aux limites statiques sont données par la nullité des efforts sur le contour. Le milieu est soumis à un champ thermique bidimensionnel $\theta = \theta(x, y)$.

2.2. Introduction d'une fonction de contrainte et établissement de la condition de compatibilité

L'équilibre statique d'un élément infinitisimal, négligeant les forces massiques, aboutit aux équations d'équilibre suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x}(e\,\sigma_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(e\,\sigma_{xy}) = 0 \qquad \text{2.2. (1)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(e\,\sigma_{yy}) + \frac{\partial}{\partial x}(e\,\sigma_{xy}) = 0$$

Introduisons une fonction de contrainte ϕ sous la forme suivante :

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{e}\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

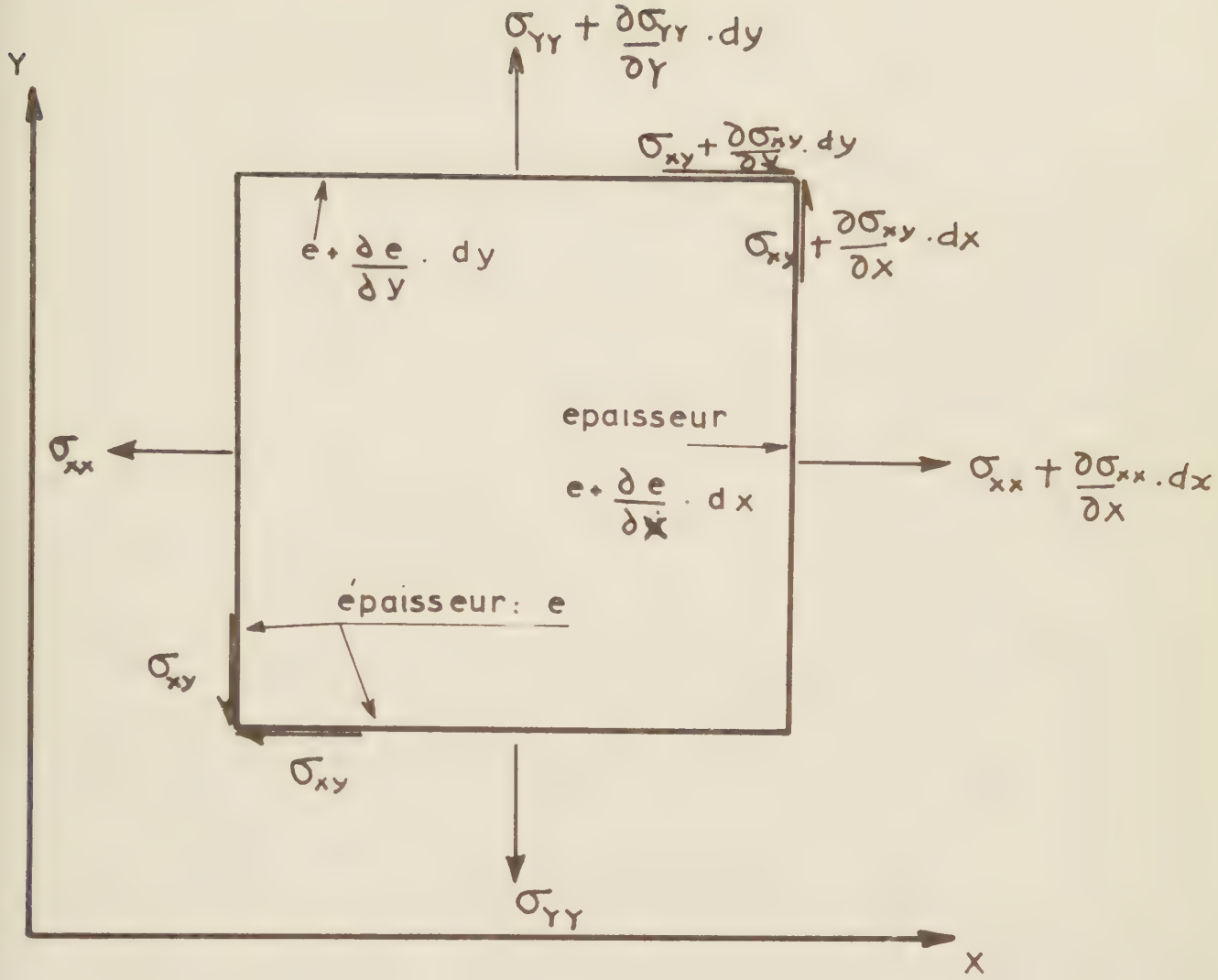
$$\sigma_{yy} = \frac{1}{e}\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad \text{2.2. (2)}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{e}\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\,\partial y}$$

Elle satisfait aux équations d'équilibre 2.2. (1). La compatibilité géométrique des déformations fournit la relation suivante, dite condition de compatibilité en élasticité bidimensionnelle.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x\,\partial y} \qquad \text{2.2. (3)}$$

.../...



EQUILIBRE DE L ELEMENT INFINITESIMAL DU MILIEU HETEROGENE PLAN

FIGURE 2.2 (i)

Les relations contraintes - déformations pour un tel milieu hétérogène s'écrivent :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(x,y)\left[\sigma_x - \nu(x,y)\,\sigma_{yy}\right] + \epsilon$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(x,y)\left[\sigma_{yy} - \nu(x,y)\,\sigma_{xx}\right] + \epsilon \qquad 2.2.(4)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu(x,y)}{E(x,y)} \cdot \sigma_{xy}$$

où : ϵ désigne la déformation thermique libre, et est égale au produit $\alpha.\theta$ dans un cas de milieu hétérogène **par inhérence.**

En reportant les équations 2.2.(4) dans la relation de compatibilité, on obtient la relation suivante :

$$\nabla^4\phi + 2E(x,y)\cdot e(x,y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{E(x,y)\cdot e(x,y)}\right]\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\phi)$$

$$+ 2E(x,y)\cdot e(x,y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{E(x,y)\cdot e(x,y)}\right]\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cdot(\nabla^2\phi)$$

$$+ 2E(x,y)\cdot e(x,y)\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{1+\nu(x,y)}{E(x,y)\cdot e(x,y)}\right]\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}$$

$$+ E(x,y)\cdot e(x,y)\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{E(x,y)\cdot e(x,y)}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y}\left(\frac{\nu(x,y)}{E(x,y)\cdot e(x,y)}\right)\right]$$

$$+ E(x,y)\cdot e(x,y)\,\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{E(x,y)\cdot e(x,y)}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\nu(x,y)}{E(x,y)\cdot e(x,y)}\right)\right]$$

$$+ E(x,y)\cdot e(x,y)\cdot\nabla^2(\epsilon) = 0$$

où $\epsilon = \alpha(x,y)\cdot\theta(x,y)$ 2.2.(5)

2.3. Résolution numérique par la méthode des différences finies

La résolution analytique de l'équation en toute généralité sous les conditions aux limites, conduit à de nombreuses difficultés. Nous adoptons la méthode des différences finies pour la résoudre en tenant compte de toute la généralité envisagée.

Dans la méthode des différences finies, un domaine R des variables indépendantes x, y est remplacé par un ensemble fini S de points dont le nombre N est relativement grand [15] Chaque fonction ϕ (x, y) est remplacée par une fonction F (p) définie sur S. Le système des équations aux dérivées partielles est donc remplacé par un système fini d'équations algébriques, qui se prête facilement à la résolution numérique sur ordinateur.

On utilisera une loi parabolique de la forme $\phi = \phi_0 + ax + by + cx^2 + dxy + fy^2$, pour exprimer la variation locale de la fonction de contrainte sur un maillage à pas variable dans les deux sens, les dérivées supérieures à la seconde sont obtenues par un artifice analogique.

2.3.1. Résolution numérique pour le milieu continu stratifié plan

Les discontinuités des caractéristiques mécanique (E, ν) et thermique (α) du milieu stratifié entraînent une ambiguité quant à leur choix lorsqu'on écrit la relation 2.2. (5) pour les points se trouvant à l'interface. Elle est surmontée en incorporant à cette relation celles obtenues par la continuité des déformations et des contraintes à l'interface. A savoir la continuité des contraintes agissant sur l'interface : [60]

$$(\sigma_{yy})_s = (\sigma_{yy})_i$$

$$(\sigma_{xy})_s = (\sigma_{xy})_i$$

La continuité des déformations agissant sur l'interface

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_s = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_s = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_i$$

.../...

où u, v : signifient les composantes des déplacements parallèle et perpendiculaire à l'interface

et les indices s,i: se rapportent à la couche supérieure et à la couche inférieure de l'interface

En faisant intervenir une fonction de contrainte, pour chaque couche, on obtient les relations suivantes correspondantes :

$$\phi_s = \phi_i \quad ; \quad \frac{\partial \phi_s}{\partial y} = \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \qquad 2.3.1.(1)$$

$$\frac{1}{E_s e_s}\left(\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial y^2} - \nu_s \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2}\right) + \alpha_s \theta_s = \frac{1}{E_i e_i}\left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} - \nu_i \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{1}{E_s e_s}\left(\frac{\partial^3 \phi_s}{\partial y^3}\right) + \left(\frac{2+\nu_s}{E_s e_s}\right)\cdot\frac{\partial^3 \phi_s}{\partial x^2 \partial y} + 2\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+\nu_s}{E_s e_s}\right)\cdot\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_s \theta_s)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{E_s e_s}\right)\left[\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial y^2} - \nu_s \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{E_i e_i}\frac{\partial^3 \phi_i}{\partial y^3} + \left(\frac{2+\nu_i}{E_i e_i}\right)\frac{\partial^3 \phi_i}{\partial x^2 \partial y} + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+\nu_i}{E_i e_i}\right)\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{E_i e_i}\right)\left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} - \nu_i \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_i \theta_i).$$

Une relation unique sera obtenue en éliminant les valeurs des fonctions de contraintes fictives, dont on se sert pour écrire les relations ci-dessous à chaque rive de l'interface. On en disposera de trois, respectivement pour un point type de l'interface, pour un point type se trouvant un pas au-dessus de l'interface, et pour un point se trouvant un pas au-dessous de l'interface (voir annexe III). Ces équations algébriques seront résolues sous les conditions aux limites $\phi = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ valables aux bords libres, n désignant le sens de la coordonnée perpendiculaire au bord libre.

2.3.2. Résolution numérique pour le milieu monocouche à caractéristiques mécaniques et thermiques sensibles à la température

Nous avons indiqué au paragraphe 1.1. qu'un milieu homogène dont les caractéristiques mécaniques et thermiques dépendent de la température, se transforme en un milieu hétérogène lorsqu'il est soumis à un champ thermique non uniforme $\theta = \theta(x, y)$. Un tel milieu se caractérise par les relations suivantes :

.../...

$$E = E(\theta)$$
$$\nu = \nu(\theta) \qquad 2.3.2.(1)$$
$$\alpha = \alpha(\theta)$$

Seule la relation 2.2(5) résolue sous les conditions aux limites $\phi = \frac{\partial \Omega}{\partial n} = 0$ donnera la solution unique du problème. Notons que les dérivées spatiales seront obtenues à partir des relations 2.3.2(1) et celles du champ thermique non-uniforme $\theta = \theta(x, y)$, à savoir :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial E}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} \qquad \text{etc.}$$

Et la relation pour la dilatation thermique libre est remplacée par :

$$\epsilon = \int_0^{\theta = \theta(x,y)} \alpha(\eta)\, d\eta$$

où η = variable muette

2.4. Obtention d'un module d'élasticité équivalent variable en fonction de la raideur du milieu plan

On justifiera dans ce qui suit, qu'il est possible d'obtenir une loi donnée du module d'élasticité d'un milieu plan en fonction de la raideur (prise égale à l'épaisseur) du milieu plan. On remarquera que le produit E.e apparaît dans toutes les relations relatives aux milieux hétérogènes plans citées. Un modèle plan dont le module d'élasticité E est une fonction donnée des coordonnées planes, sera remplacé par un modèle plan à module d'élasticité constant, dont l'épaisseur e, perpendiculaire au plan est une fonction e = e (x, y) obtenue en respectant la constance de la valeur E x e aux points homologues des deux modèles.

Considérons un modèle théorique ayant une épaisseur constante e et un module d'élasticité $E_{th} = E_{th}(x, y)$, et un modèle expérimental homothétique dont l'épaisseur e_{exp} est une fonction des coordonnées planes et le module d'élasticité E_{exp} est constant. Si la relation $E_{th}(x, y).\ e_{th} = E_{exp} \cdot x\ e(x, y)$ est respectée en tous les points homologues, la solution ϕ du problème thermoélastique pour les deux modèles plans, sous les mêmes conditions aux limites, sera la même, donc également les dérivées spatiales

$$(\sigma_{ij})_{th} = -\frac{1}{e_{th}}\left(\delta_{ij}\,\phi_{,kk} - \phi_{,ij}\right) \qquad i, j = x, y \quad k = x, y$$

$$(\sigma_{ij})_{exp} = -\frac{1}{e_{exp}(x, y)}\left(\delta_{ij}\,\phi_{,kk} - \phi_{,ij}\right)$$

Donc : $$(\sigma_{ij})_{th} = (\sigma_{ij})_{exp} \cdot \frac{e_{exp}(x, y)}{e} \qquad 2.4\ (1)$$

Cette relation permet de transposer les résultats du champ de contraintes obtenu sur un modèle homothétique à épaisseur variable à un modèle plan à module d'élasticité variable. Notons toutefois, que l'épaisseur variable du modèle expérimental doit être conforme aux conditions de contraintes planes généralisées.

.../...

2.5. Influence du coefficient de Poisson sur le champ de contraintes d'origine thermique dans les milieux continus hétérogènes

2.5.1. Rappel des résultats d'élasticité linéaire et méthode adoptée dans la présente étude

Il est connu qu'en élasticité linéaire, la non-indépendance du champ de contraintes par rapport aux constantes élastiques est limitée à une classe restreinte de problèmes. Rappelons ces catégories brièvement.

1 - En élasticité plane, le régime de contraintes est indépendant des constantes élastiques si les forces massiques et les forces agissant sur chaque contour s'annulent [33]. Pour un milieu plan à connexion multiple, une relation explicite de dépendance existe si les efforts agissant sur un contour sont équivalents à une seule force [10]

2 - En élasticité tridimensionnelle, il a été démontré [51] en utilisant un développement en série du coefficient de Poisson que dans un corps de connexion quelconque, le régime de contraintes est indépendant du coefficient de Poisson, si la dilatation $\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{3}$ (donc le premier invariant des contraintes σ_{ii}) est une fonction linéaire des coordonnées cartésiennes. Ce résultat valable pour le deuxième problème aux limites (efforts **prescrits** sur le contour) a été étendu au problème mixte dans [8]. On sait que dans le deuxième problème aux limites les contraintes sont indépendantes du module de rigidité.

3 - **En utilisant la méthode de variable complexe, la dépendance explicite des contraintes d'origine thermique en déformation place d'un milieu à connexion multiple, sous l'effet d'un champ thermique harmonique, est présenté dans [30] en fonction des conditions aux limites thermiques sur les contours.**

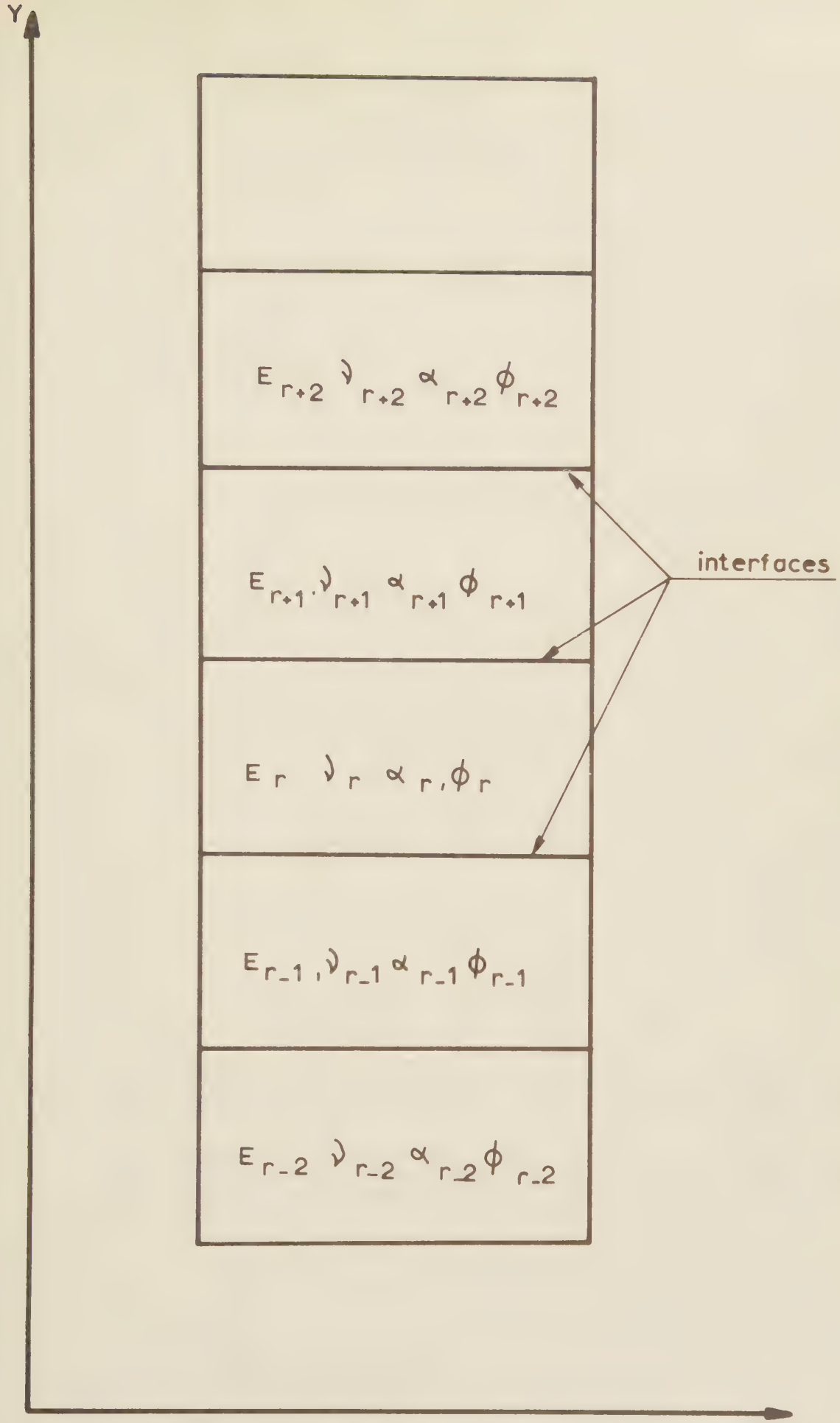
4 - Les solutions analytiques connues pour de nombreux problèmes de l'élasticité tridimensionnelle, nous permettent d'admettre que l'influence du coefficient de Poisson sur les contraintes plus grandes est négligeable. Voir par exemple [31]

Nous étudierons dans ce qui suit, sous quelles conditions l'influence du coefficient de Poisson sur le régime des contraintes thermiques dans le problème thermoélastique plans du milieu hétérogènes, peut être négligée.

Méthode adoptée

Nous considérons deux problèmes thermoélastiques plans relatifs au milieu concerné, qui ne diffèrent que par la valeur du coefficient de Poisson (ν et ν'). Désignons le champ de contraintes dans les deux problèmes respectivement par σ_{ij} et σ_{ij}' $i, j = 1, 2$. A partir des deux premiers problèmes, on constitue un 3e dont le champ de contraintes τ_{ij} donné par la relation $\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}'$. Un examen des conditions sous lesquelles ce champ de contraintes τ_{ij} s'annulle, nous amènera à établir la classe des problèmes qui sont insensibles à la valeur du coefficient de Poisson.

.../...



$\nu_{r-1} = \nu_2 = \nu_{r+n}$

FIGURE 2_5_2 (i)

2.5.2. Influence du coefficient de Poisson sur le champ de contraintes dans un milieu multicouche plan isotrope

Nous considérons un milieu multicouche plan, dont le module d'élasticité est homogène par morceaux. Le coefficient de dilatation thermique α et le champ thermique sont les fonctions quelconques des coordonnées cartésiennes planes, à savoir :

$$\alpha = \alpha(x, y)$$
$$\theta = \theta(x, y)$$

Le coefficient de Poisson est constant pour tout le milieu.

Considérons un premier problème P_1 relatif à la $i^{ème}$ couche du milieu multicouche. Il est décrit par les relations suivantes (voir 2.3.1.).

A l'intérieur de la couche : $\nabla^4 \phi_i + E_i \nabla^2(\alpha_i \theta_i) = 0$

Conditions aux limites sur les bords libres :

$$\phi_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} = 0$$

Conditions de continuité à l'interface supérieure :

$$\phi_{i+1} = \phi_i \quad ; \quad \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial y} = \frac{\partial \phi_i}{\partial y}$$

$$\frac{1}{E_{i+1}}\left[\frac{\partial^2 \phi_{i+1}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi_{i+1}}{\partial x^2}\right] + \alpha_{i+1}\theta_{i+1} = \frac{1}{E_i}\left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}\right] + \alpha_i \theta_i$$

$$\frac{1}{E_{i+1}}\left[\frac{\partial^3 \phi_{i+1}}{\partial y^3} + (2+\nu)\frac{\partial^3 \phi_{i+1}}{\partial x^2 \partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_{i+1}\theta_{i+1}) = \frac{1}{E_i}\left[\frac{\partial^3 \phi_i}{\partial y^3} + (2+\nu)\frac{\partial^3 \phi_i}{\partial x^2 \partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_i \theta_i)$$

Conditions de continuité à l'interface inférieure :

$$\phi_i = \phi_{i-1} \quad ; \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{\partial \phi_{i-1}}{\partial y}$$

$$\frac{1}{E_i}\left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}\right] + \alpha_i \theta_i = \frac{1}{E_{i-1}}\left[\frac{\partial^2 \phi_{i-1}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi_{i-1}}{\partial x^2}\right] + \alpha_{i-1}\theta_{i-1}$$

$$\frac{1}{E_i}\left[\frac{\partial^3 \phi_i}{\partial y^3} + (2+\nu)\frac{\partial^3 \phi_i}{\partial x^2 \partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_i \theta_i) = \frac{1}{E_{i-1}}\left[\frac{\partial^3 \phi_{i-1}}{\partial y^3} + (2+\nu)\frac{\partial^3 \phi_{i-1}}{\partial x^2 \partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_{i-1}\theta_{i-1})$$

où ϕ_r est la fonction de contraintes de la $i^{ème}$ couche.

.../...

Considérons un deuxième problème relatif à la même couche, qui est soumise aux mêmes conditions aux limites sur les bords libres et champ thermique. Seul le coefficient de Poisson varie pour ce problème, étant égal à ν'. Ce problème est décrit par les relations suivantes :

A l'intérieur de la couche :

$$\nabla^4 \psi_i + E_i \nabla^2 (\alpha_i \theta_i) = 0$$

Conditions aux limites :

$$\psi_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = 0$$

Conditions de continuité à l'interface supérieure :

$$\psi_{i+1} = \psi_i \quad ; \quad \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial y} = \frac{\partial \psi_i}{\partial y}$$

2...3.(...)

$$\frac{1}{E_{i+1}}\left[\frac{\partial^2 \psi_{i+1}}{\partial y^2} - \nu' \frac{\partial^2 \psi_{i+1}}{\partial x^2}\right] + \alpha_{i+1}\theta_{i+1} = \frac{1}{E_i}\left[\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} - \nu' \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2}\right] + \alpha_i \theta_i$$

$$\frac{1}{E_{i+1}}\left[\frac{\partial^3 \psi_{i+1}}{\partial y^3} + (2+\nu')\frac{\partial^3 \psi_{i+1}}{\partial x^2 \partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_{i+1}\theta_{i+1}) = \frac{1}{E_i}\left[\frac{\partial^3 \psi_i}{\partial y^3} + (2+\nu')\frac{\partial^3 \psi_i}{\partial x^2 \partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_i \theta_i)$$

Conditions de continuité à l'interface inférieure :

$$\psi_i = \psi_{i-1} \quad ; \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial y}$$

$$\frac{1}{E_i}\left[\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} - \nu' \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2}\right] + \alpha_i \theta_i = \frac{1}{E_{i-1}}\left[\frac{\partial^2 \psi_{i-1}}{\partial y^2} - \nu' \frac{\partial^2 \psi_{i-1}}{\partial x^2}\right] + \alpha_{i-1}\theta_{i-1}$$

$$\frac{1}{E_i}\left[\frac{\partial^3 \psi_i}{\partial y^3} + (2+\nu')\frac{\partial^3 \psi_i}{\partial x^2 \partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_i \theta_i) = \frac{1}{E_{i-1}}\left[\frac{\partial^3 \psi_{i-1}}{\partial y^3} + (2+\nu')\frac{\partial^3 \psi_{i-1}}{\partial x^2 \partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_{i-1}\theta_{i-1})$$

où ψ_i = fonction de contrainte relative à la $i^{ème}$ couche

.../...

Constituons un troisième problème P_3 dont la fonction de contrainte relative à la $r^{ième}$ couche F_r est donnée par la relation suivante : $F_r = \phi_r - \psi_r$ Elle satisfera aux relations suivantes obtenues par la soustraction du système d'équations relatif au deuxième problème à celui du premier problème.

A l'intérieur de la couche : $\nabla^4 F_r = 0$

Conditions aux limites sur les bords libres :

$$F_r = \frac{\partial F_r}{\partial x} = 0$$

Conditions de continuité à l'interface supérieure :

$F_{r+1} = F_r$ 2. .3.(3)

$$\frac{\partial F_{r+1}}{\partial y} = \frac{\partial F_r}{\partial y}$$

$$\frac{1}{E_{r+1}}\left[\frac{\partial^2 F_{r+1}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F_{r+1}}{\partial x^2}\right] - \left(\frac{\nu-\nu'}{E_{r+1}}\right)\frac{\partial^2 \psi_{r+1}}{\partial x^2} = \frac{1}{E_r}\left[\frac{\partial^2 F_r}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F_r}{\partial x^2}\right] - \left(\frac{\nu-\nu'}{E_r}\right)\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{E_{r+1}}\left[\frac{\partial^3 F_{r+1}}{\partial y^3} + (2+\nu)\frac{\partial^3 F_{r+1}}{\partial x^2 \partial y}\right] + \left(\frac{\nu-\nu'}{E_{r+1}}\right)\frac{\partial^3 \psi_{r+1}}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1}{E_r}\left[\frac{\partial^3 F_r}{\partial y^3} + (2+\nu)\frac{\partial^3 F_r}{\partial x^2 \partial y}\right] + \left(\frac{\nu-\nu'}{E_r}\right)\frac{\partial^3 \psi_r}{\partial x^2 \partial y}$$

Conditions de continuité à l'interface inférieure :

$$F_r = F_{r-1}$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial y} = \frac{\partial F_{r-1}}{\partial y}$$

$$\frac{1}{E_r}\left[\frac{\partial^2 F_r}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F_r}{\partial x^2}\right] - \left(\frac{\nu-\nu'}{E_r}\right)\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial x^2} = \frac{1}{E_{r-1}}\left[\frac{\partial^2 F_{r-1}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F_{r-1}}{\partial x^2}\right] - \left(\frac{\nu-\nu'}{E_{r-1}}\right)\frac{\partial^2 \psi_{r-1}}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{E_r}\left[\frac{\partial^3 F_r}{\partial y^3} + (2+\nu)\frac{\partial^3 F_r}{\partial x^2 \partial y}\right] + \left(\frac{\nu-\nu'}{E_r}\right)\frac{\partial^3 \psi_r}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1}{E_{r-1}}\left[\frac{\partial^3 F_{r-1}}{\partial y^3} + (2+\nu)\frac{\partial^3 F_{r-1}}{\partial x^2 \partial y}\right] + \left(\frac{\nu-\nu'}{E_{r-1}}\right)\frac{\partial^3 \psi_{r-1}}{\partial x^2 \partial y}$$ ...../...

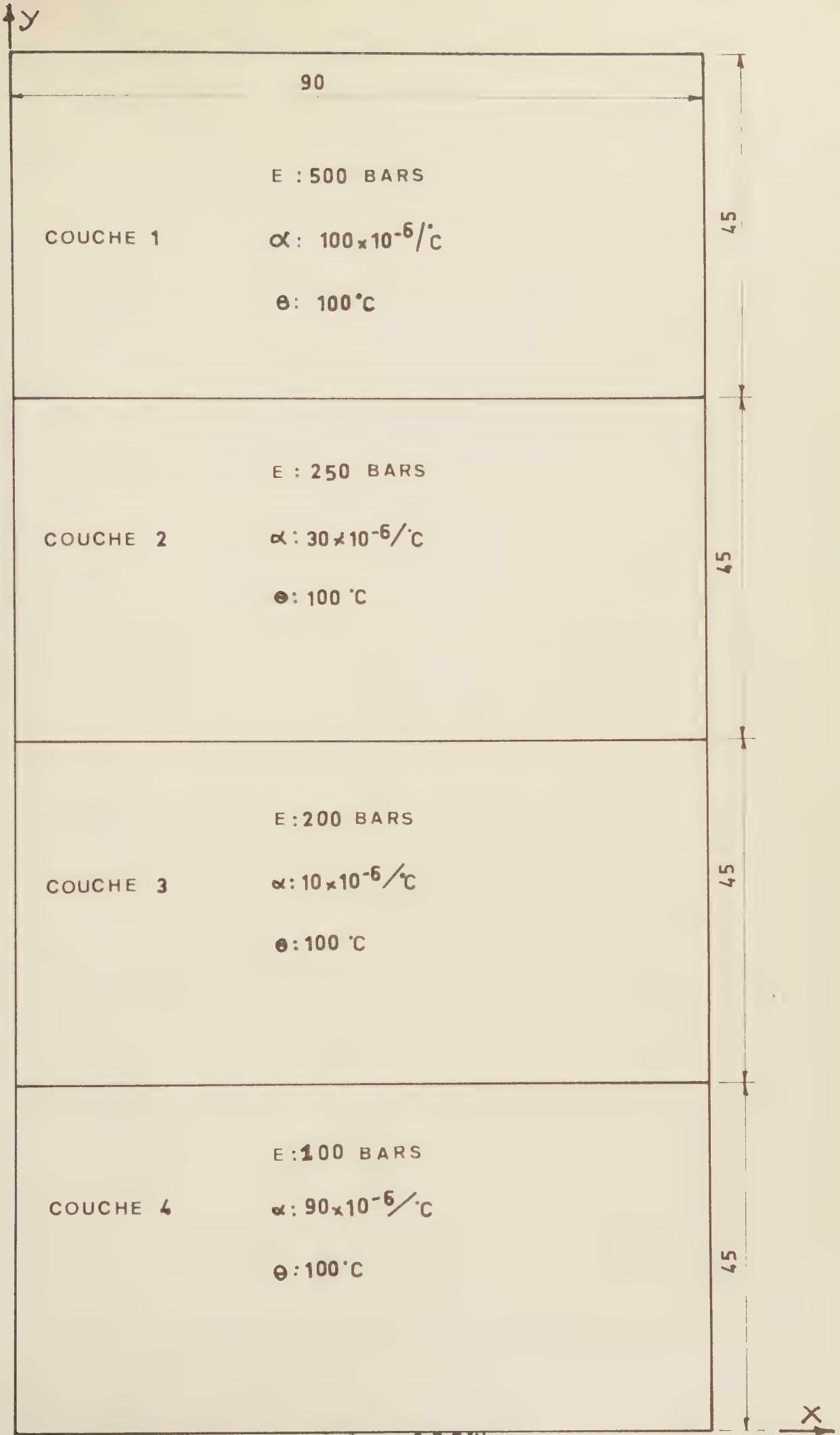


FIGURE 2.5.2(i)
GEOMETRIE ET CARACTERISTIQUES PHYSIQUES DU MILIEU CONTINU QUADRICOUCHE

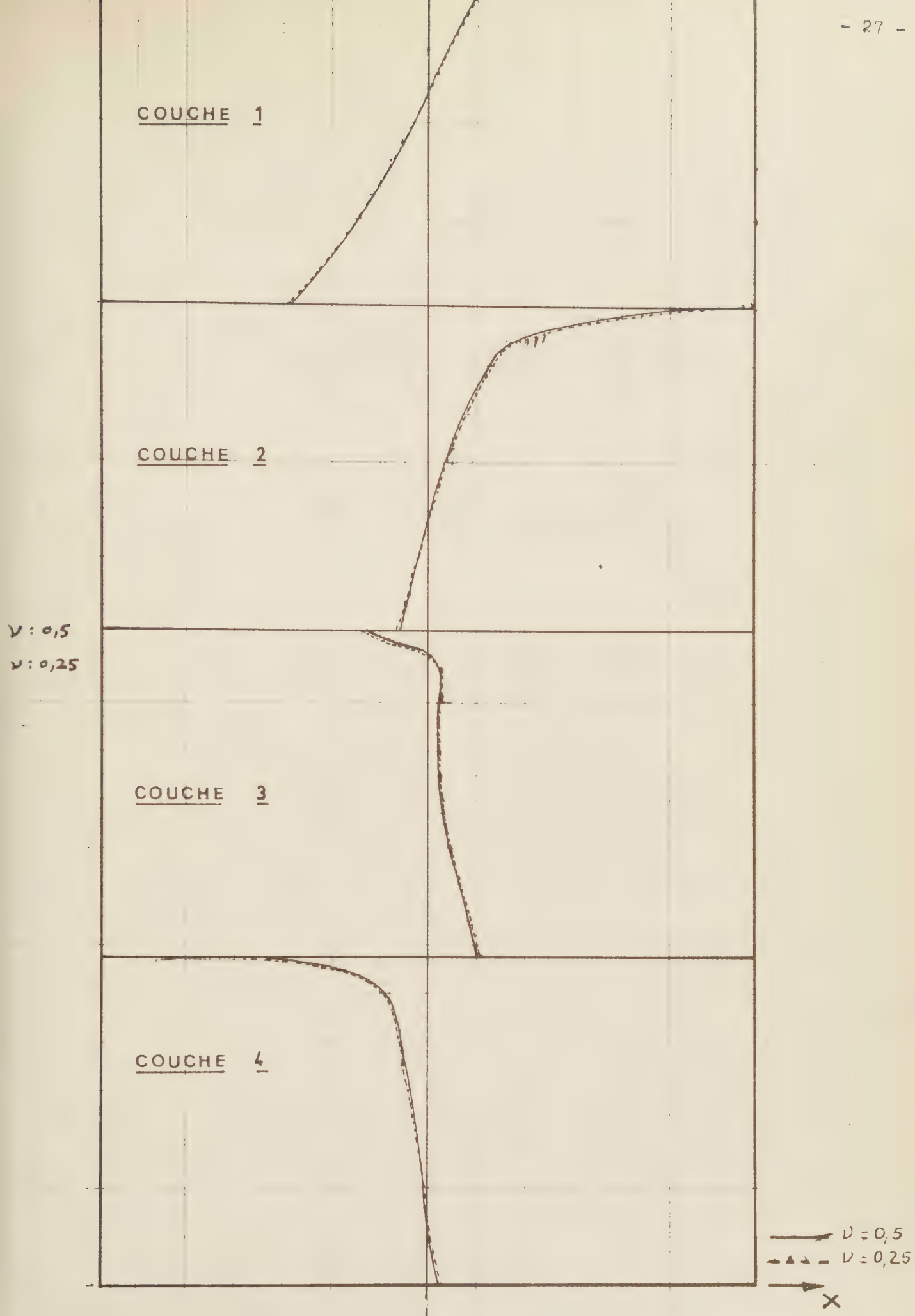


FIGURE 2.5.2(ii)

INFLUENCE DU COEFFICIENT DE POISSON SUR LA CONTRAINTE σ_{xx} DANS UN MILIEU QUADRICOUCHE HOMOGENE PAR MORCEAUX

Ce troisième problème s'identifié à un problème de l'élasticité pure pour le même milieu plan multicouche, soumis aux conditions aux limites de chargements de nullité, donc à un champ de contraintes de nullité, si les relations suivantes sont satisfaites.

A l'interface supérieure :

$$\left(\frac{\nu-\nu'}{E_{i+1}}\right)\frac{\partial^2\psi_{i+1}}{\partial x^2} = \left(\frac{\nu-\nu'}{E_i}\right)\cdot\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2}$$

$$\left(\frac{\nu-\nu'}{E_{i+1}}\right)\cdot\frac{\partial^3\psi_{i+1}}{\partial x^2\partial y} = \left(\frac{\nu-\nu'}{E_i}\right)\cdot\frac{\partial^3\psi_i}{\partial x^2\partial y}$$

A L'interface inférieure : 2.5.3.(4)

$$\left(\frac{\nu-\nu'}{E_i}\right)\cdot\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2} = \left(\frac{\nu-\nu'}{E_{i-1}}\right)\cdot\frac{\partial^2\psi_{i-1}}{\partial x^2}$$

et :

$$\left(\frac{\nu-\nu'}{E_i}\right)\cdot\frac{\partial^3\psi_i}{\partial x^2\partial y} = \left(\frac{\nu-\nu'}{E_{i-1}}\right)\cdot\frac{\partial^3\psi_{i-1}}{\partial x^2\partial y}$$

La continuité du milieu plan suppose l'égalité des dérivées partielles $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}$ à chaque rive des interfaces ; elles sont respectivement la composante de contraintes normale agissant sur le plan d'interface et le grandient de la contrainte tangentielle agissant sur le plan d'interface.

Donc les conditions 2.5.3.(4) sont satisfaites si $E_{r+1} = E_r$ à l'interface supérieure, et $E_r = E_{i-1}$ à l'interface inférieure; cela n'étant possible que pour un milieu homogène quant au module d'élasticité Donc le champ de contraintes dans un milieu multicouche homogène par morceaux dépendra de la valeur du coefficient de Poisson, à moins que l'homogénéité par morceaux n'est celle du coefficient de dilatation thermique.

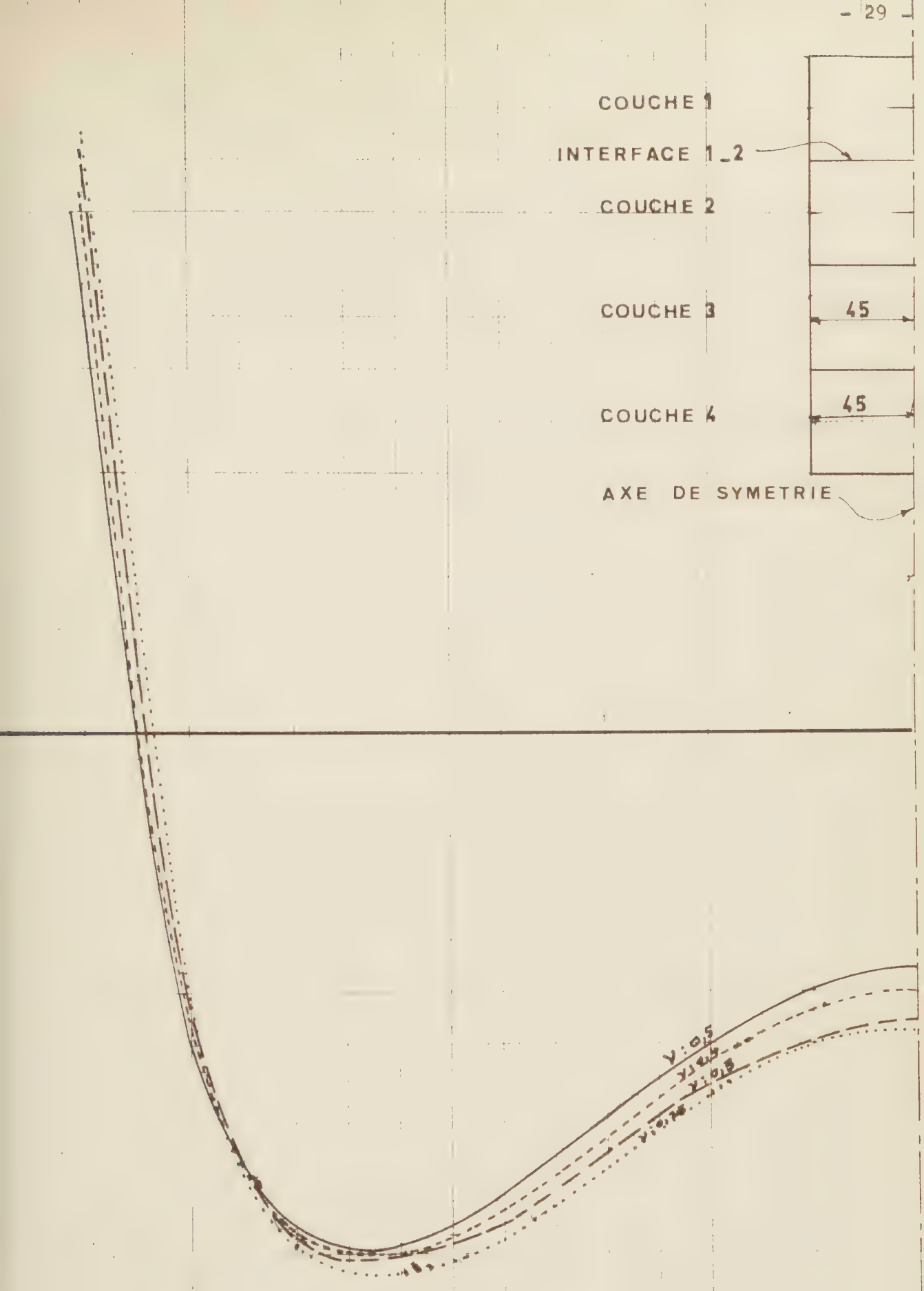


FIGURE 2.5.2(iii)

REPARTITION DE LA CONTRAINTE σ_{yy} AU NIVEAU DE L'INTERFACE 1_2 POUR DIFFERENTES VALEURS DU COEFFICIENT DE POISSON DANS UN MILIEU CONTINU QUADRICOUCHE HOMOGENE PAR MORCEAUX _ ECHELLE : 1 CM = 0,005 BAR

La résolution par la méthode des différences finies est utilisée afin d'obtenir les valeurs numériques des contraintes d'origine thermique dans un milieu continu quadricouche, dont le module d'élasticité est homogène par morceaux, lors d'une variation uniforme de température.

Les figures 2.5.2. (ii) et 2.5.2. (iii) montrent les profils des contraintes pour quatre valeurs du coefficient de Poisson de 0,5 à 0,25.

DEUXIEME PARTIE : ETUDES THEORIQUES ET EXPERIMENTALES PRELIMINAIRES AUX EXPERIENCES EN MILIEUX CONTINUS HETEROGENES

page

CHAPITRE 3 - Photothermoélasticimétrie directe et limitations générales..... 31

3.1. Photothermoélasticimétrie..... 31

3.2. Limitations générales des techniques photothermoélasticimétriques directes dans l'étude d'un milieu isotrope homogène..... 32

3.2.1. Perturbation des champs d'isochromes et d'isoclines par le dispositif de mesure de la température..... 33

3.2.3. Influence de la dépendance thermique et temporelle des caractéristiques thermiques du matériau photoélasticimétrique sur l'obtention de la similitude de température..... 37

3.3. Conclusions partielles..... 41

DEUXIEME PARTIE

ETUDES THEORIQUES ET EXPERIMENTALES PRELIMINAIRES AUX EXPERIENCES EN MILIEUX CONTINUS HETEROGENES

CHAPITRE 3 - PHOTOTHERMOELASTICIMETRIE DIRECTE ET LIMITATIONS GENERALES

3.1. Photothermoélasticimétrie

Les techniques photothermoélasticimétriques qui sont basées sur l'effet biréfringent des matériaux isotropes transparents, peuvent être classées en deux principales catégories, à savoir :

I - Photothermoélasticimétrie directe
II - Photothermoélasticimétrie indirecte

La photothermoélasticimétrie directe se caractérise par la présence physique du champ thermique, qui provoque le régime des contraintes dans le modèle. Le champ thermique est réalisé par le transfert de chaleur au modèle par la conduction, la convection, le rayonnement. Le modèle est en matière biréfringente et la mesure de l'effet photoélastique se fait soit sur un banc photoélasticimétrique classique [19] soit à l'aide d'un dispositif à lumière diffusée [9]. Le champ thermique s'évalue à partir des mesures de la température du modèle au moyen de thermocouples destinés à cette fin.

La méthode de recouvrement photoélastique appliquée à l'étude des contraintes thermiques peut être rattachée à la même catégorie. Elle suppose l'utilisation d'un modèle en matière non transparente (donc, le prototype même le cas échéant) dont une zone d'observation est couverte d'un vernis photoélastique. L'effet photoélastique dans le recouvrement lors de l'application du champ thermique est observé par un polariscope à réflexion [59].

.../...

En photothermoélasticimétrie indirecte, le champ thermique ne figure pas physiquement. Le champ de déformations et de contraintes résultant du champ thermique est simulé au moyen des analogies mécaniques ou quasi-mécaniques. Le modèle en matière biréfringente ainsi sollicité, est observé à l'aide des techniques photoélasticimétriques usuelles.

L'analogie thermo-mécanique de BIOT - MUSKHELISHVELLI [2] conçoit l'obtention des contraintes d'origine thermiques dans les corps cylindriques à connexion multiple, en les rendant à connexion simple par un certain nombre de coupures. Elle a été utilisée pour étudier des contraintes thermiques dans un anneau cylindrique à connexion multiple [11] et dans des anneaux de formes carrées [56].

La méthode de défigeage des déformations thermiques libres se base sur la propriété quasi-mécanique de figeabilité et de défigeabilité des biréfringences dans les matériaux photoélastiques.

Nous reviendrons sur cette méthode dans le chapitre 4.

3.2. Limitations générales des techniques photothermoélasticimétriques directes dans l'étude d'un milieu isotrope homogène

La photoélasticimétrie en tant que méthode d'analyse des contraintes possède, entre autres, trois qualités particulières :

I - La possibilité d'obtention d'une image complète des sollicitations du modèle.

II - La possibilité d'obtention d'une grande précision en fonction du chargement extérieur qui a pour effet d'accroître le nombre de franges dans le modèle.

III - La possibilité de simuler une sollicitation mécanique homologue de celle subie par le prototype, dans le modèle, permettant la transposition des résultats obtenus sur le modèle au prototype, appliquée à l'étude des contraintes d'origine thermique ; la photothermoélasticimétrie directe semble être restreinte en ce qui concerne ces potentiels.

.../...

3.2.1. Perturbation des champs d'isochromes et d'isoclines par le dispositif de mesure de la température

La répartition de température dans le modèle photothermoélasticimétrique s'obtient à l'aide de thermocouples encastrés sur la surface du modèle. La fixation des thermocouples qui exige le perçage et l'enlèvement d'une partie du matériau du modèle [19] perturbe la continuité physique de la matière. Les perturbations locales des propriétés physiques qui en résultent affecteront l'image photoélasticimétrique des isochromes et des isoclines. Cela engendrera des difficultés d'observations des franges dans le modèle, et seront inéluctables si le régime des contraintes dans le modèle est assymétrique.

3.2.2. Influence de la dépendance thermique des propriétés mécaniques, optiques et physiques du matériau du modèle

En photoélasticimétrie bidimensionnelle et tridimensionnelle, la sollicitation mécanique extérieure peut être variée afin d'obtenir une grande précision jusqu'à ce que la limite d'élasticité linéaire ne soit pas dépassée. Les caractéristiques physiques telles que le module d'élasticité, le coefficient de Poisson, restent pratiquement invariables à l'intérieur de ce domaine.

Dès que la sollicitation mécanique est remplacée par la sollicitation thermique, outre la limite d'élasticité linéaire, la limite de constance des propriétés physiques du matériau du modèle telles que le module d'élasticité, le coefficient de Poisson, le coefficient de dilatation thermique, la constante photoélasticimétrique y intervient. Les matériaux normalement utilisés en photothermoélasticimétrie directe en fonction des critères de la bonne sensibilité optique, de facilité d'obtention ou de préparation et d'usinage, étant pour la plupart des hauts-polymères thermodurcissables et réticulés à l'état vitreux, possèdent des propriétés physiques qui subissent l'influence de la température ; un haut-polymère se caractérise par une température de transition vitreuse à partir de laquelle les propriétés physiques, après avoir dépendu de la température, accusent une allure discontinue [35].

.../...

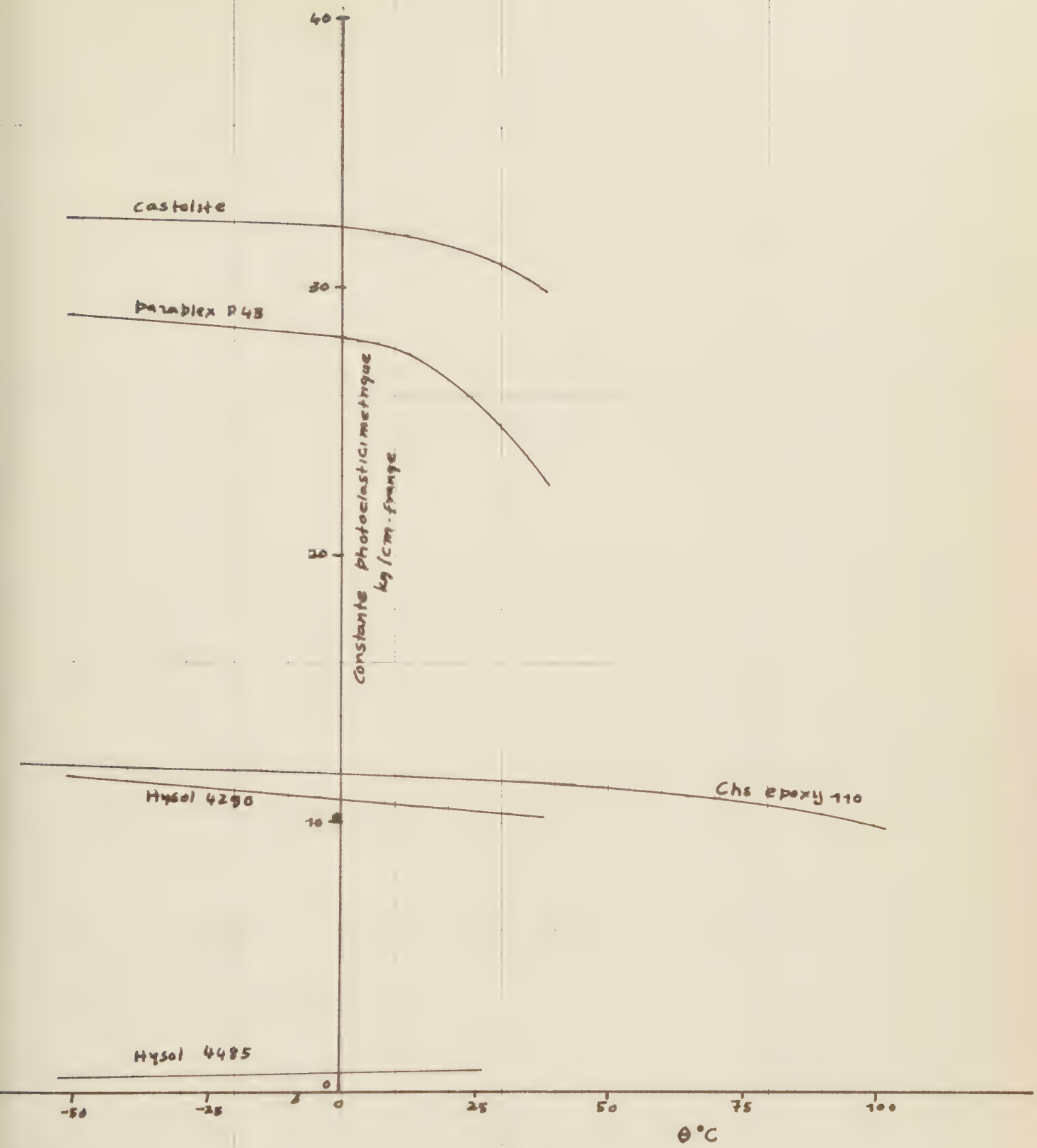


FIGURE 3.2.2. (i)

DEPENDANCE THERMIQUE DE LA CONSTANTE PHOTOELASTICIMETRIQUE DE QUELQUES MATERIAUX DE MODELE (D'APRES DE NOMBREUX AUTEURS)

La théorie atomique de l'effet photoélastique prévoit la dépendance thermique de la constante photoélasticimétrique d'un haut polymère à l'état vitreux dont les déformations se traduisent par une affinité.

Donc la constante photoélasticimétrique dépend de la température et elle est vérifiée par l'expérience. Nous indiquons dans la figure 3.2.2.(1) la variation de la constante photoélasticimétrique d'un certain nombre de matériaux de modèles utilisés en photothermoélasticimétrie directe.

Les autres caractéristiques physiques telles que le module d'élasticité, le coefficient de Poisson, le coefficient de dilatation thermique se comportent de la même manière [35].

S'il s'agit d'une transposition des résultats expérimentaux obtenus sur le modèle homothétique du prototype, une condition de constance plus facile à respecter, s'obtient de la façon suivante : la condition de similitude pour les composantes de contraintes dans le modèle et le prototype pour une sollicitation thermique plane, s'écrit [6] :

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_m} = \frac{E_p}{E_m} \cdot \frac{\alpha_p}{\alpha_m} \cdot \frac{\theta_p}{\theta_m} \qquad 3.2.2.\ (1)$$

Pour le modèle on a :

$$\sigma_1 = n \frac{s}{t} \qquad 3.2.2.\ (2)$$

où σ = composante de la contrainte
E = module d'élasticité
α = coefficient de dilatation thermique
θ = température
n = ordre de frange
s = constante photoélasticimétrique
t = épaisseur du modèle plan

.../...

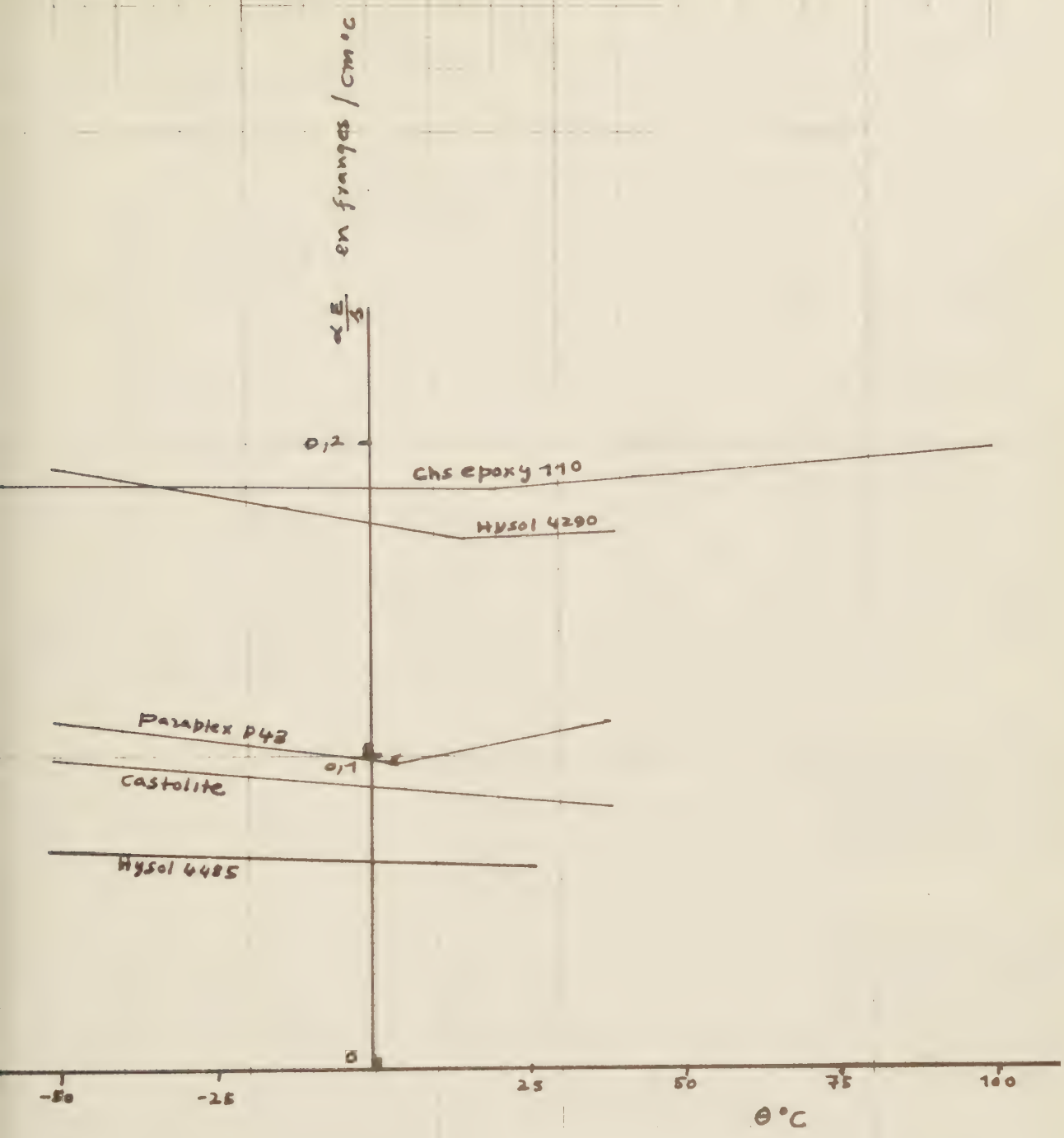


FIGURE 3.2.2. (ii)

DEPENDANCE THERMIQUE DU QUOTIENT $\frac{\alpha E}{\delta}$
POUR QUELQUES MATERIAUX DE MODELE
(D'APRES DE NOMBREUX AUTEURS)

Les indices p et m se réfèrent respectivement au prototype et au modèle.

Donc, on obtient la relation suivante pour les composantes de contraintes dans le prorotype :

$$\sigma_p = E_p \varepsilon_p \cdot \frac{s}{E_m \alpha_m} \cdot \frac{n}{t_m} \cdot \frac{\theta_p}{\theta_m} \qquad 3.2.2.\ (3)$$

Il en ressort que la transposition sera linéaire si le quotient $\frac{\varepsilon}{E_m \alpha_m}$ reste invariable dans le domaine de température considéré, en admettant bien entendu que les propriétés physiques du matériau du prototype soient constantes dans le domaine homologue de température.

La figure 3.2.2. (II) montre la variation du quotient $\frac{\alpha_m E_m}{g}$ en fonction de la température pour un certain nombre de matériaux utilisés normalement en photothermoélasticimétrie.

3.2.3. Influence de la dépendance thermique et temporelle des caractéristiques thermiques du matériau photoélasticimétrique sur l'obtention de la similitude de température

Reprenons la relation 3.2.2. (1) ; il a été **tacitement** admis que le quotient $\frac{\theta_m}{\theta_p}$ demeure temporellement et spatialement invariable, c'est-à-dire que les répartitions homologues de température sont présumées et elles sont indispensables pour pouvoir transposer des résultats obtenus sur un modèle photoélasticimétrique au prototype.

La répartition de température dans un corps solide dépend de ses propriétés thermiques suivant la loi de FOURIER [5] et des conditions aux limites de transfert de chaleur.

.../...

Nous donnons dans l'annexe I les relations fonctionnelles obtenues à l'aide de l'analyse dimensionnelle pour la répartition de température dans un corps solide homogène dans plusieurs cas de condition aux limites.

On s'aperçoit du rôle important que joue le nombre de FOURIER (Fo) et le nombre de BIOT (Bi). Examinons les conditions sous lesquelles le respect de l'égalité de ces deux nombres sans dimension peut s'effectuer.

1 - Nombre de FOURIER

Il s'écrit : $Fo = \frac{kt}{L^2}$

où : k = diffusivité thermique du solide (m^2/s)
t = temps (s)
L = dimension type linéaire du solide (m)

Le nombre de FOURIER intervient dans tous les phénomènes thermiques non-stationnaires et détermine les temps homologues auxquels des températures homologues se produisent dans le prototype et le modèle. L'égalité du nombre de FOURIER du modèle et celui du prototype conduit à la relation suivante :

$$\frac{t_p}{t_m} = \left(\frac{L_p}{L_m}\right)^2 \frac{k_m}{k_p} \qquad 3.2.3.\ (1)$$

Il s'ensuit que le quotient $\frac{k_m}{k_p}$ doit rester constant dans l'intervalle de température utilisé dans la sollicitation thermique du modèle et du prototype. Or, ni les matériaux du modèle tels que les résines époxides, ni les matériaux du prototype tels que l'acier, l'aluminium, le béton, etc... ne possèdent une valeur constante de la diffusivité thermique indépendante de la température. La figure . montre à titre d'exemple la variation en fonction de la température de la diffusivité thermique de l'araldite D et de l'araldite B.

.../...

Dans ces conditions, la simulation d'une sollicitation thermique non-stationnaire est rendue imprécise par la dépendance thermique des valeurs de diffusivité thermique du matériau du modèle et du prototype.

2. Nombre de BIOT

Il s'écrit : $Bi = \frac{hL}{\lambda}$

où : h = coefficient de transmission calorifique superficielle $w/m^2 . °C$

λ = conductibilité thermique du corps (modèle ou prototype) $w/m . °C$

L = dimension type linéaire du corps (m)

L'égalité des nombres de BIOT du modèle et du prototype doit être respectée pour les phénomènes thermiques pour lesquels les conditions aux limites de transfert de chaleur se font par convection. Elle conduit à la relation suivante :

$$\frac{L_p}{L_m} = \left(\frac{h_m}{h_p}\right) . \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_m}\right) \qquad 3.2.3. (2)$$

Il s'ensuit que sauf coïncidence invraisemblable, les deux quotients $\frac{h_m}{h_p}$ et $\frac{\lambda_m}{\lambda_p}$ pris séparément, doivent être constants dans le domaine de température considéré.

Du fait de la dépendance thermique de la conductibilité thermique des solides, plus précisément des matériaux usuels de modèles que montre la figure , le quotient $\frac{\lambda_m}{\lambda_p}$ ne demeurera pas invariable lors de la variation de température.

Quant au coefficient de transmission calorifique superficielle, il n'est pas une propriété du matériau, mais une fonction des caractéristiques physiques du fluide environnant et de la géométrie du corps solide. Ainsi on a [42] les relations fonctionnelles qui groupent les nombres adimensionnels caractérisant le coefficient de transmission calorifique superficielle pour un corps solide dans trois cas de transfert de chaleur par convection.

.../...

Si le transfert de chaleur sur les surfaces extérieures du corps s'effectuent par la convection libre, ce coefficient en régime stationnaire, est donné par la formule suivante :

$$h = \frac{\lambda_f}{L}\,\phi\left(\frac{L^3\rho_f^2 g}{\eta_f^2},\ \frac{\lambda_f}{c_f\eta_f},\ \frac{T_s}{T_f}\right) \qquad 3.2.3.\ (3)$$

Dans le cas de transfert de chaleur par convection aérodynamique forcée, la relation fonctionnelle pour le coefficient en régime stationnaire, est la suivante :

$$h = \frac{\lambda_f}{L}\,\psi\left(\frac{L^3\rho_f^2 g}{\eta_f^2},\ \frac{\lambda_f}{c_f\eta_f},\ \frac{T_s}{T_f},\ \frac{L\,\omega_f\,\rho_f}{\eta_f}\right) \qquad 3.2.3.\ (4)$$

Au cas de transfert de chaleur par convection forcée, le coefficient pendant le régime non-stationnaire qui précède le régime permanent, est exprimé par :

$$h = \frac{\lambda_f}{L}\,f\left(\frac{\lambda_f}{c_f\eta_f},\ \frac{L^3\rho_f^2 g}{\eta_f^2},\ \frac{T_s}{T_f},\ \frac{L\,\omega_f\,\rho_f}{\eta_f},\ \frac{t\,\eta_f}{\rho_f L^2}\right) \qquad 3.2.3.\ (\ )$$

où $\lambda, \rho, \eta, T, C$ sont respectivement la conductibilité thermique, la densité, la viscosité, la température et la chaleur massique du fluide environnant ; ω est la vitesse de circulation du courant en régime de convection forcée et L est la dimension type linéaire du corps solide.

En toute généralité, le respect des nombres adimensionnels dans les fonctionnelles, sera nécessaire afin que le coefficient de transmission calorifique superficielle du modèle et du prototype soit le même, seule condition qui rendra le quotient $\frac{h_m}{h_p}$ constant dans le cas général où les fonctions ϕ, ψ et f ne sont pas homogènes.

.../....

Les nombres adimensionnels $\frac{L^3 \rho^2 g}{\eta^2}$, $\frac{\lambda}{c\eta}$, $\frac{L\omega\rho}{\eta}$ et $\frac{T_s}{T_f}$ relatifs au modèle et au prototype, peuvent être maintenus constants en fonction des caractéristiques physiques, de la température du fluide environnant, de la géométrie et de la température du corps solide. Ceci déterminera le fluide environnant à utiliser dans l'essai sur modèle.

Il reste le nombre adimensionnel $\frac{t\eta}{\rho L^2}$ dont l'égalité dans le modèle et dans le prototype conduit à la relation suivante :

$$\frac{t_p}{t_m} = \frac{\eta_m}{\eta_p} \cdot \frac{\rho_p}{\rho_m} \cdot \left(\frac{L_p}{L_m}\right)^2 \qquad 3.2.3.\ (6)$$

En comparant cette relation 3.2.3.(6) avec la relation 3.2.3.(1) des temps homologues obtenus en conséquence du respect du nombre de FOURIER, on obtient la relation :

$$\frac{k_r}{k_p} = \frac{\eta_m}{\eta_p} \cdot \frac{\rho_p}{\rho_m} \qquad 3.2.3.\ (7)$$

qui limitera le choix du fluide environnant.

En résumé, les caractéristiques physiques et la température du fluide environnant pour la sollicitation thermique du modèle, seront déterminées par la température de surface, la géométrie et la diffusivité thermique du matériau du modèle. Du fait du grand nombre de paramètres à respecter, il est possible que le choix du fluide environnant soit multiple.

3.3. Conclusions partielles

I - De nombreux inconvénients cités ci-dessus peuvent être surmontés en pénalisant la simplicité et la linéarité de l'interprétation des résultats expérimentaux, et souvent dans les cas particuliers simples.

.../...

1 - L'utilisation de deux modèles identiques, soumis au même champ thermique, l'un équipé de nombreux thermocouples destinés à la mesure du champ thermique et l'autre intact pour l'observation photoélasticimétrique évitera les perturbations des franges causées par les thermocouples [47].

2 - La variation du module d'élasticité, du coefficient de dilatation thermique, du coefficient de Poisson, de la constante photoélasticimétrique du matériau du modèle, en fonction de la température peut être prise en considération dans l'interprétation des résultats, mais cette opération n'est simple que dans le cas de champ thermique défini par une variation uniforme de température.

3 - La variation thermique de la diffusivité thermique du matériau du modèle, n'intervenant qu'en régime thermique transitoire peut être considérée comme une modification de l'échelle du temps.

4 - L'obtention de champs thermiques homologues, malgré la dépendance thermique et temporelle des caractéristiques thermiques, peut être assurée par l'utilisation d'une combinaison des modes de transfert de chaleur visant à changer les conditions aux limites thermiques, en espace et en temps.

5 - Les contraintes d'origine thermique dans un milieu homogène plan, peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma = E\,\alpha\,\theta\,.\,f(L)$$

où : E = module d'élasticité

α = coefficient de dilatation thermique

θ = variation de température

f (L) = fonction dépendant de la forme géométrie

Donc :

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta E}{E} + \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\theta}{\theta}$$

.../...

Le domaine de température d'utilisation peut donc être étendu en tenant compte des variations thermiques des propriétés physiques du matériau du modèle, en fonction de la précision désirée dans la valeur des contraintes.

II - L'analogie de BIOT - MUSKHELISHVELLI, bien qu'elle évite les difficultés posées par la présence du champ thermique, n'est applicable qu'à l'étude des contraintes thermiques dans les corps cylindriques bidimensionnels (anneaux) à connexions multiples.

page

CHAPITRE 4 - Méthode de défigeage des déformations thermiques libres..... 44

4.1. Description de la méthode..... 44
4.2. Base théorique de la méthode générale..... 44
4.3. Quelques remarques..... 49
4.3.1. Le choix des éléments..... 49
4.3.2. Influence de la valeur du coefficient de Poisson..... 50
4.3.3. Régime de contraintes planes..... 50
4.3.4. Compatibilité géométrique des déformations initiales $e_{ij} = -\epsilon' \delta_{ij}$ figeables 50
4.4. Méthode du champ de déformation unitaire..... 51
4.5. Méthode particulière de défigeage de déformations thermiques libres applicables au milieu stratifié plan ou spatial..... 53
4.5.1. Extension au régime de contraintes planes généralisées..... 53
4.6. Position actuelle de la méthode..... 56
4.7. Choix des matériaux soumis au défigeage sur la base du coefficient de mérite..... 58

CHAPITRE 4 - METHODE DE DEFIGEAGE DES DEFORMATIONS THERMIQUES LIBRES

4.1. Description de la méthode

Un modèle homothétique du prototype est construit, par collage d'éléments individuels susceptibles de subir un figeage des biréfringences. Les dimensions des éléments se déterminent à partir de celles de la partie du prototype dans laquelle la température peut être considérée constante. (voir paragraphe 5.3.4. pour la raison d'être de cette limitation). Des déformations homologues et de signe inverse des déformations thermiques libres du prototype, sont introduites dans les éléments par chargement et figeage. Après l'assemblage des éléments par collage, le modèle composite est soumis à un cycle thermique qui défigera les biréfringences initiales des éléments. Le résultat est une redistribution des déformations identiques à celles nées des contraintes thermiques étudiées. Ces déformations seront dépouillées par les méthodes photoélasticimétriques usuelles.

4.2. Base théorique de la méthode générale

Considérons un milieu continu $\mathcal{M}$ limité par la surface S soumis à un champ thermique égal à $\theta = \theta(x_1, x_2, x_3)$ repéré par rapport à un système d'axes de coordonnées. Les caractéristiques mécaniques et thermiques, à savoir : le module d'élasticité E, le coefficient de Poisson ν, et le coefficient de dilatation thermique α, sont des fonctions continues des coordonnées spatiales x_1, x_2, x_3.

$$\text{Donc : } E = E(x_1, x_2, x_3)$$
$$\nu = \nu(x_1, x_2, x_3)$$
$$\alpha = \alpha(x_1, x_2, x_3)$$

$$\text{Posons : } \eta = \frac{E}{1 - 2\nu} = \eta(x_1, x_2, x_3)$$

$$\epsilon = \alpha\theta = \epsilon(x_1, x_2, x_3)$$

$$\text{et } \sigma = \eta\epsilon = \sigma(x_1, x_2, x_3) = \frac{E\,\alpha\,\theta}{1 - 2\nu}$$

.../...

FORCES SUR LA SURFACE EXTERIEURE.

$E^n_i = (\eta\epsilon_0 + \eta\epsilon')\, n_i$

FORCES MASSIQUES

$X_i = -(\eta\epsilon_0 + \eta\epsilon')_{,i}$

$=$

$E^n_i = \eta\epsilon_0\, n_i$

$X_i = -(\eta\epsilon_0)_{,i}$

$+$

$E^n_i = \eta\epsilon'\, n_i$

$X_i = -(\eta\epsilon')_{,i}$

DEFORMATION HYDROSTATIQUE VOLUMIQUE

$e_{ij} = -(\epsilon_0 + \epsilon')\,\delta_{ij}$

$e_{ij} = -\epsilon_0\,\delta_{ij}$

$e_{ij} = -\epsilon'\,\delta_{ij}$

SYSTEME S T

SYSTEME ST O

SYSTEME ST'

$i, j = 1, 2, 3$

FIGURE 4·2 (i)

Soit ϵ_o une valeur extrême de la fonction $\epsilon = \epsilon(x_1, x_2, x_3)$ dans le domaine qu'enveloppe la surface extérieure S du milieu continu.

Exprimons ϵ sous la forme suivante :

$$\epsilon(x_1, x_2, x_3) = \epsilon_o + \epsilon'(x_1, x_2, x_3)$$

où : $\epsilon_o = \alpha_o \theta_o$ = constante

$$\epsilon' = \alpha' \theta'$$

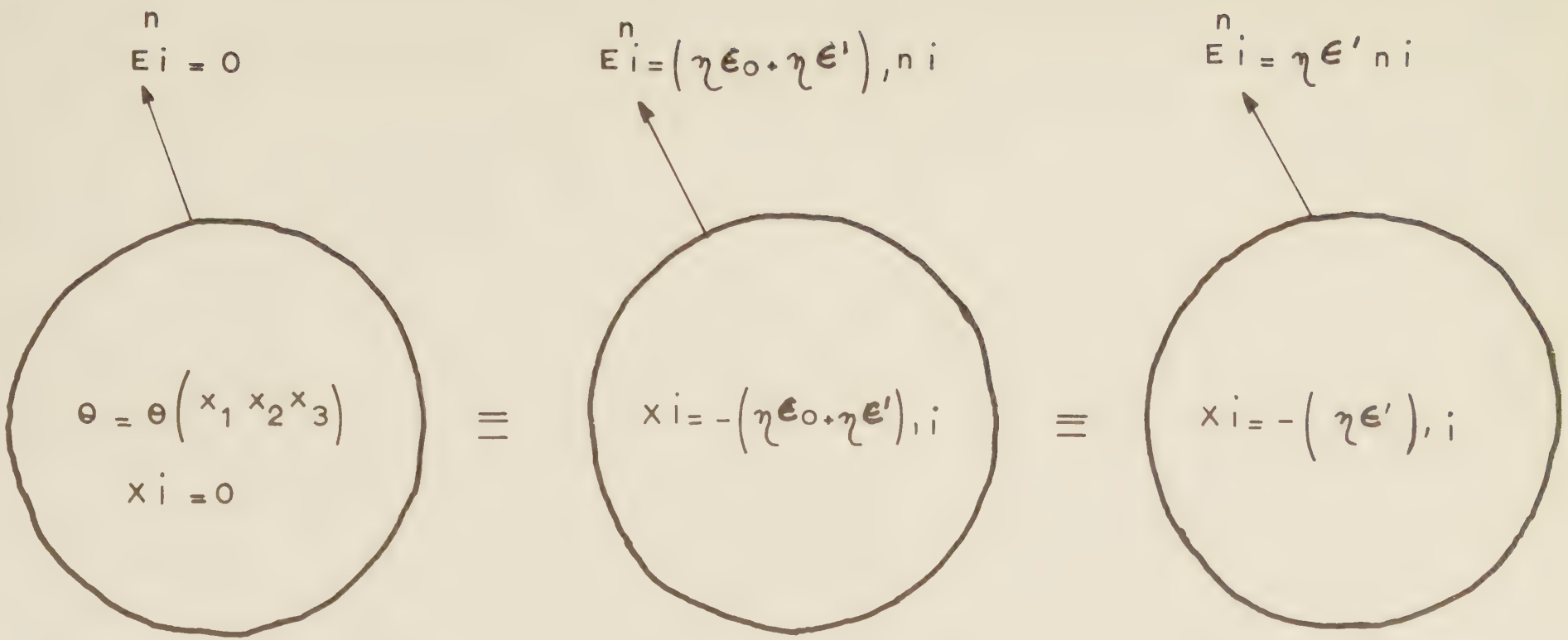
A l'aide de l'analogie de Duhamel appliquée à ce milieu continu hétérogène, le champ de contraintes dans ce milieu peut s'exprimer par un système de forces massiques $x_i = -(\gamma)_{,i} = -(\eta\epsilon_o + \eta\epsilon')_{,i}$ $i = 1, 2, 3$; un champ d'efforts agissant sur la surface S égale à : $\overset{n}{E}_i = \gamma n_i$, $i = 1, 2, 3$ et un champ de déformation hydrostatique agissant sur chaque élément du milieu continu égal à $e_{ij} = -\epsilon . \delta_{ij}$ (voir annexe II).

n étant le vecteur normal unitaire extérieur ayant les composantes n_1, n_2 et n_3 et agissant sur la surface S.

Décomposons ce système S_T en deux systèmes S_{To} et S_T' qui correspondent respectivement à ϵ_o et ϵ' (voir figure 4.2. (1)

En appliquant de nouveau l'analogie de Duhamel, on constatera que le système S_{To} correspond à un champ de contraintes dans le milieu continu M lors d'une variation de $\epsilon_o = \alpha_o \theta_o$ = constante ; Or les contraintes d'origine thermique ne se produisent pas lors d'une variation uniforme du produit $\alpha . \theta$. Donc les contraintes dans le système S_{To} sont toutes nulles. Par conséquent, avec la variation de ϵ , ainsi posée, seule $\epsilon' = \epsilon'(x_1, x_2 x_3)$, contribue à la présence des contraintes d'origine thermique (voir figure 4.2. (II)

.../...



PROBLEME DE THERMOELASTICITE PURE

$e_{ij} = -(\epsilon_0 + \epsilon')\,\delta_{ij}$

SYSTEME ST

(PAR L'ANALOGIE DE DUHAMEL)

$e_{ij} = -\epsilon'\,\delta_{ij}$

SYSTEME ST'

FIGURE 4·2 (ii)

L'application de la méthode de défigeage à l'étude des contraintes d'origine thermique dans ce milieu, se fera en trois phases qui sont les suivantes :

I-Le figeage dans le milieu continu des déformations thermiques libres relatives

$$e_{ij} = - \epsilon' \delta_{ij}$$

Ceci exigera la division du milieu continu en un nombre fini d'éléments afin de pouvoir figer avec succès les déformations $e_{ij} = -\epsilon' \delta_{ij}$ conformément aux conditions de compatibilité (voir 4.3.4.)

II - La restitution du milieu continu par assemblage des éléments dans lesquels sont figées les déformations $e_{ij} = - \epsilon' \delta_{ij}$

III - La troisième phase consiste à défiger le milieu continu restitué sous l'action d'aucun chargement extérieur. Le défigeage, on le sait (5.1.1.II), conduira à l'application d'un champ de contraintes de module égal et de signe opposé à celui qui a été préalablement figé.

Le champ de déformations $e_{ij} = -\epsilon' \delta_{ij}$ figé au cours de la phase I, peut être représenté par un système de forces massiques $Y_i = (\eta \epsilon')_{,i}$ $i = 1, 2, 3$; un système de forces s'exerçant sur la surface extérieure S égal à $\overset{n}{F}_i = - \eta \epsilon' n_i$. On le vérifiera en les rapportant aux équations d'équilibre exprimées en fonction de composantes de déformations et aux conditions aux limites, Le défigeage du milieu continu reconstitué équivaudra à l'application d'un système de module égal et de signe opposé, à savoir :

$$Z_i = -Y_i = - (\eta \epsilon')_{,i} \qquad i = 1,2,3$$

$$\overset{n}{G}_i = -\overset{n}{F}_i = \eta \epsilon' n_i$$

.../...

Donc, le champ de contraintes dans le milieu continu après le défigeage sera la résultante des deux systèmes suivants :

(I) Le système qui a été figé $e_{ij} = -\epsilon_1 \delta_{ij}$

(II) Le système appliqué au cours du défigeage

$$z_i = -(\eta\epsilon')_{,i} \qquad i,j = 1,2,3$$

$$\vec{G}_i = \eta\epsilon' \cdot n_i$$

Ce système s'identifie avec le système S_T, et par conséquent avec le champ de contraintes d'origine thermique dans le milieu continu dû à $\theta = \theta(x_1 x_2 x_3)$

4.3. Quelques remarques

4.3.1. Le choix des éléments

La forme géométrique des éléments sera déterminée par la possibilité de figer avec succès les déformations hydrostatiques initiales : $e_{ij} = -\epsilon' \delta_{ij}$

Afin que les contraintes défigées aient le même signe que les contraintes thermiques réelles, la quantité $\eta\epsilon'$ doit toujours garder le même signe dans le milieu continu. On s'aperçoit qu'il existe un point au moins dans lequel aucune biréfringence n'est figée initialement.

Ce point de repère a pour valeur la valeur extrême de ϵ égale à ϵ_0. Il s'ensuit que si ϵ_0 est la valeur algébriquement supérieure des valeurs ϵ dans M, les biréfringences initiales de traction égales à $\epsilon' \delta_{ij}$ seront figées. Par contre, si ϵ_0 est la valeur inférieure algébriquement des ϵ dans M, les biréfringences initiales de compression égales à $\epsilon' \delta_{ij}$ seront figées.

.../...

4.3.2. Influence de la valeur du coefficient de Poisson

Les matériaux constamment utilisés en figeage tels que les résines époxydes, ont un coefficient de Poisson de valeur 0,50, à la température de figeage, par conséquent, le figeage initial d'un champ de déformation correspondant à un champ thermique tridimensionnel n'est pas possible.

4.3.3. Régime de contraintes planes

Dans un régime de contraintes planes, η prendra la valeur $\eta = -\frac{E}{1-\nu}$, le reste de la justification étant la même.

4.3.4. Compatibilité géométrique des déformations initiales $e_{ij} = -\epsilon' \delta_{ij}$ figeables

Dans un régime de contraintes spatiales, on démontrera que le seul champ de déformations initiales e_{ij} figeable qui soit géométriquement compatible, est celui qui suit une loi linéaire,

Donc :

$$\epsilon' = \alpha' \theta' = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \qquad 4.3.4.\ (1)$$

où : a_0, a_1, a_2, a_3 sont des constantes.

Dans un régime de contraintes planes, la compatibilité géométrique des déformations initiales figeables est satisfaite pour un champ harmonique bidimensionnel.

Donc :

$$\nabla^2 \epsilon' = \nabla^2 (\alpha' \theta') = 0 \qquad 4.3.4.\ (2)$$

Il s'ensuit que les lois de variation de la température et du coefficient de dilatation thermique doivent satisfaire les relations respectivement 4.3.4. (1) et 4.3.4. (2) suivant le cas.

.../...

4.4. Méthode du champ de déformation unitaire

Dans ce paragraphe nous généralisons la méthode du champ thermique unitaire [25] afin qu'elle soit utilisée pour l'étude du milieu hétérogène.

On définit les contraintes unitaires comme celles qui se produisent dans le milieu solide lorsqu'une partie du milieu est soumise à une variation unitaire de déformation, c'est-à-dire soumise à un champ de déformation unitaire. Elle consiste à diviser le diagramme $\epsilon' = \epsilon - \epsilon_0 = \epsilon'(x_1 x_2 x_3)$ en un certain nombre, n, de segments v_i de telle manière que la condition suivante soit satisfaite :

$$\iiint_V \epsilon' \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta\epsilon' \cdot v_i$$

où V = volume du milieu

v_i = volume élémentaire type dans lequel une déformation $\Delta\epsilon'$ est figée.

Dans le cas unidimensionnel, cette expression prend la forme suivante (voir la figure 4.4. (1)

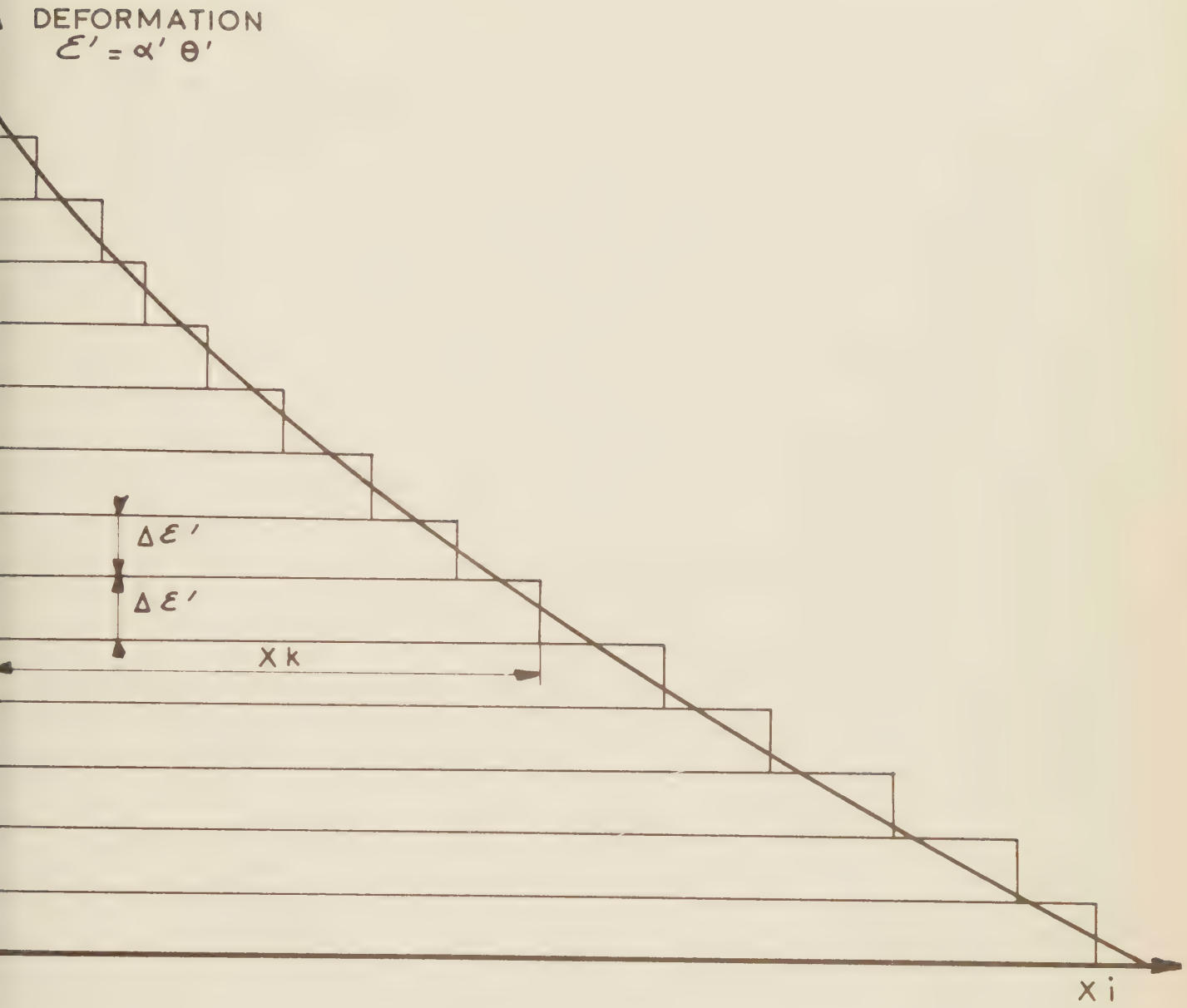
$$\int \epsilon' dx_1 \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta\epsilon_1 \cdot x_i$$

Les biréfringences initiales unitaires ($\epsilon' = 1$) sont figées dans le volume v_i du milieu et le milieu reconstitué est défigé. Les contraintes défigées sont les contraintes unitaires, appelons celles-ci $\sigma^{(1)}$. Le procédé est répété et la superposition de ces contraintes unitaires multipliées par $\Delta\epsilon'$ donnera les contraintes voulues dans le milieu.

Donc on a :

$$\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{(1)} \cdot \Delta\epsilon'$$

.../...



LA DIVISION DU DIAGRAMME DU CHAMP DE DEFORMATION $\mathcal{E}'$ DANS LE CAS UNIDIMENSIONEL

FIGURE 4·4(i)

4.5. Méthode particulière de défigeage de déformations thermiques libres applicables au milieu stratifié plan ou spatial

La méthode suivante de défigeage qui diffère de la méthode décrite au paragraphe 4.2. I, II et III est restreinte à l'étude des contraintes d'origine thermique dans le milieu stratifié plan ou spatial, dont les interfaces séparatives constituent une série de surfaces courbées ayant la même forme géométrique. L'identicité de la forme géométrique sera assurée si les interfaces appartiennent à une famille de surfaces obtenue par translation.

Les deux constants élastiques du milieu continu isotropes, à savoir le module d'élasticité E et le coefficient de Poisson ν, le coefficient de dilatation thermique α et la variation de température θ sont tous fonctions continues par morceaux des coordonnées spatiales. La continuité en est comprise jusqu'à leurs premières dérivées. Par conséquent, l'interface sera définie comme la surface courbée formée par l'ensemble des points où l'une des fonctions citées présente une discontinuité.

Dans ce type de problème, on suppose que la composante de déformation thermique libre e_{33} perpendiculaire aux interfaces n'a aucun effet sur les contraintes d'origine thermique dans le milieu et par conséquent peut être choisie arbitrairement. Donc les déformations initiales figées sont:

$$e_{11} = e_{22} = \epsilon'(x_1\ x_2\ x_3) = \alpha'\theta'$$
$$e_{33} = \text{arbitraire}$$
$$e_{12} = e_{23} = e_{31} = 0$$

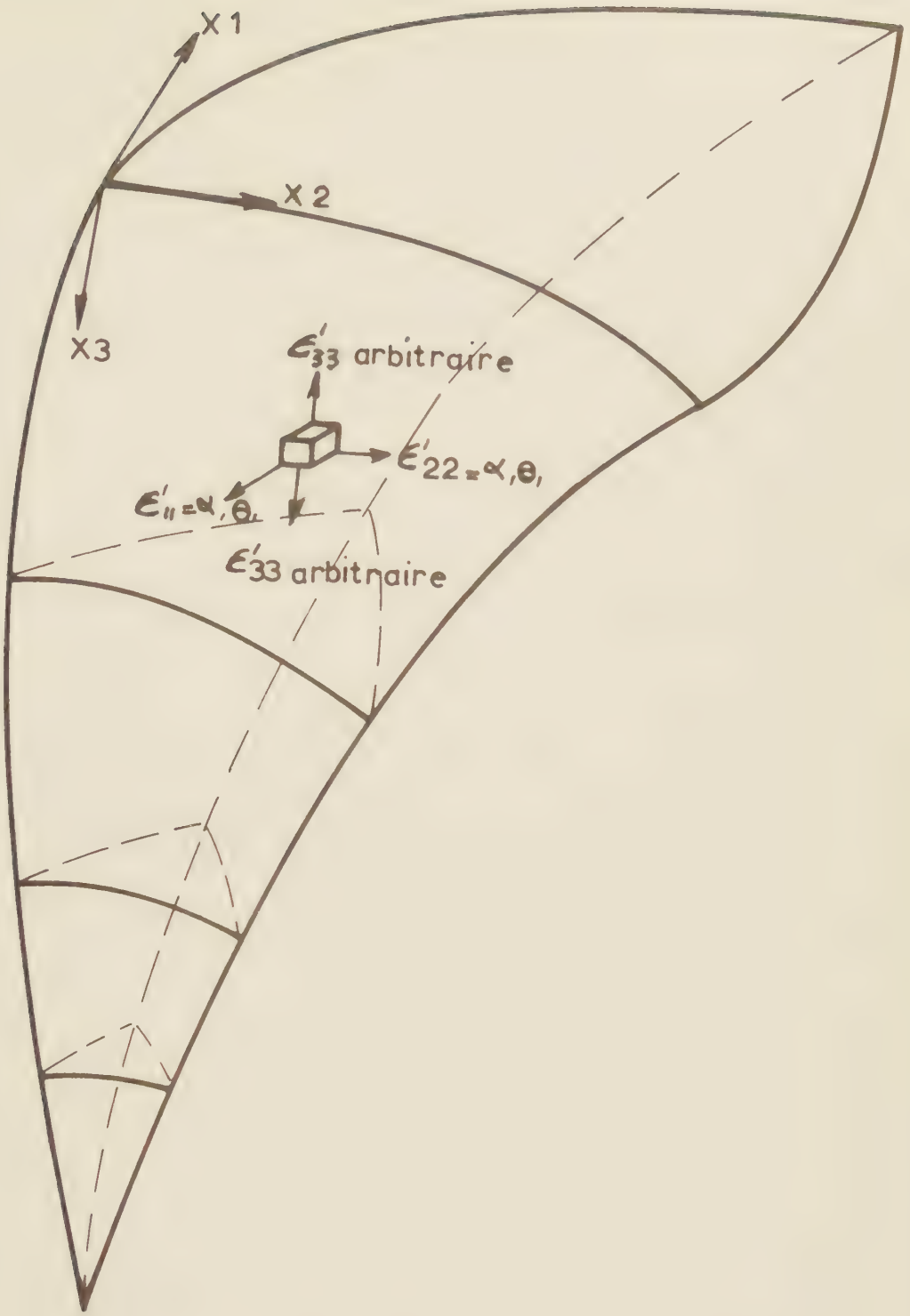
Rappelons que la méthode générale (paragraphe 4.2.) prévoit le figeage initial des déformations hydrostatiques.

4.5.1. Extension au régime de contraintes planes généralisées

En régime de contraintes planes généralisées, outre la composante e_{33}, la composante e_{22} perpendiculaire au plan du milieu ne joue aucun rôle dans l'état de contraintes thermiques. Aussi sera-t-elle choisie arbitrairement. Donc on a :

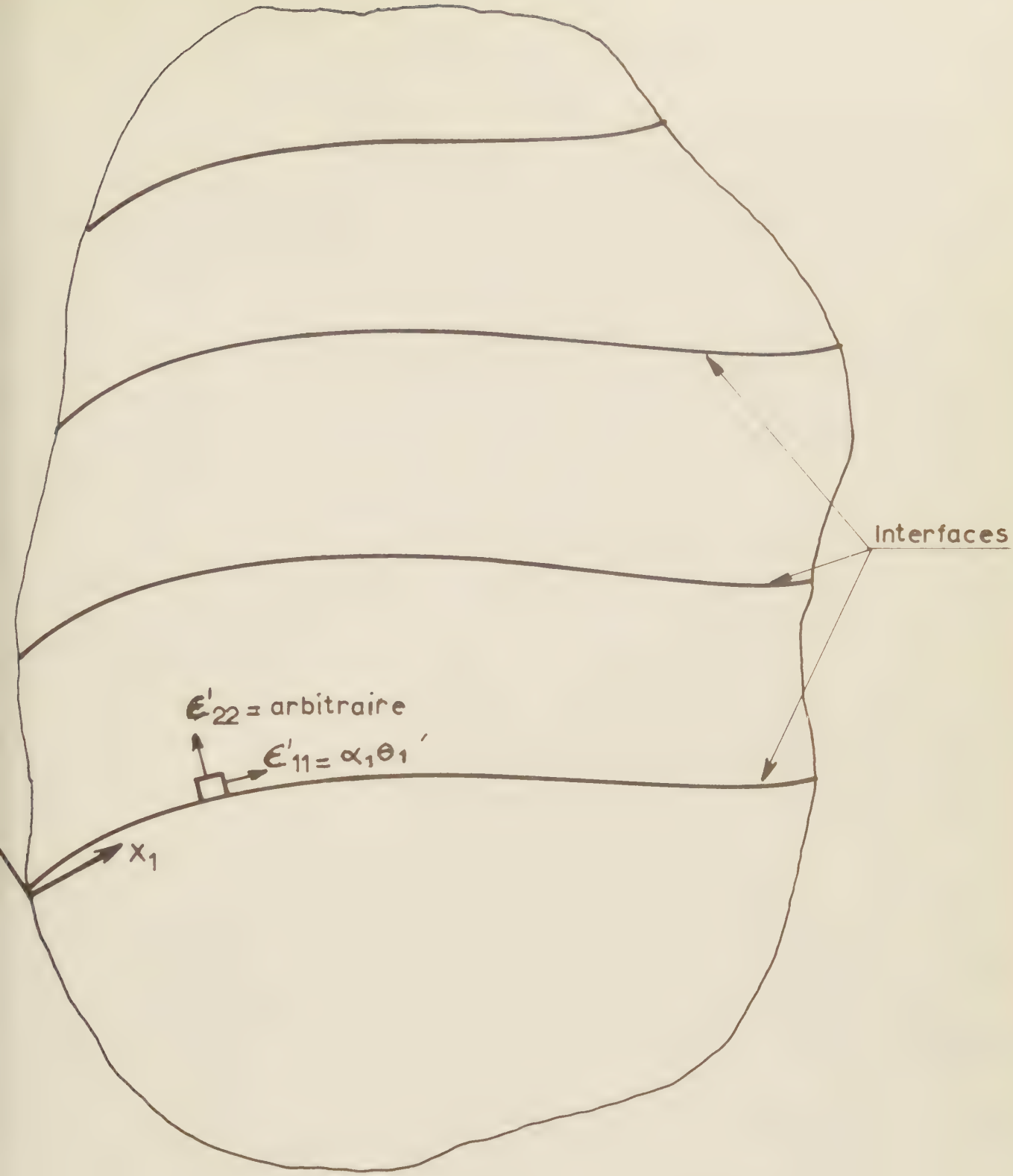
$$e_{22} = e_{33} = \text{arbitraire}$$
$$e_{11} = \epsilon'(x_1\ x_2) = \alpha'\theta'$$
$$e_{12} = 0$$

.../...



MILIEU CONTINU MULTICOUCHE SPATIAL DONT LES INTERFACES APPARTIENNENT A UNE FAMILLE DE SURFACES OBTENUE PAR TRANSLATION

FIGURE N° 4.5(j)



MILIEU MULTICOUCHE PLAN A INTERFACES APPARTENANT A UNE FAMILLE DE SURFACES OBTENUE PAR TRANSLATION

FIGURE N° 4·5·1·(j)

4.6. Position actuelle de la méthode

La première étude des contraintes d'origine thermique par défigeage de déformations thermiques libres a été effectuée par R.C. SAMPSON et MM LEVEN en 1959 aux U.S.A. [46]. Elle concerne les contraintes thermiques dans un élément de dispositif nucléaire, survenues à la suite d'un différentiel de température.

N.I. PRIGORWSKII et G.S. VARDANYAN ont réalisé en 1961 l'application de la méthode à plusieurs cas de contraintes thermiques, dans un anneau cylindrique lors d'un frettage, et dans une poutrelle bicouche [45]. Le matériau utilisé est l'époxy E'D - 6 - M ayant une constante photoélastique de 0,277 kg/cm et un coefficient de Poisson de 0,5.

Depuis 1966 G.L. KHESIN et al ont apporté de nombreuses contributions à l'application de la méthode dans les milieux plans et spatiaux, et ont introduit la méthode de champ thermique unitaire. Leurs contributions peuvent être classées en deux principales catégories :

I - Etude des contraintes d'origine thermique dans des massifs parallélépipédiques reposant sur une fondation élastique ou rigide lorsque la température du massif subit une variation uniforme

Les essais sur modèles homothétiques en époxy ED 6 M se rapportent aux prototypes des massifs de section carrée en béton, dont le rapport $\frac{\text{hauteur}}{\text{largeur}}$ en côté est égal à 0,5, utilisés pour les barrages poids. Deux types d'élasticité de fondation sont considérés, l'un ayant le même module d'élasticité que le massif et l'autre de rigidité infinie ($\frac{E \text{ massif}}{E \text{ fondation}} = 0$)

La méthode particulière de défigeage décrite au paragraphe 4.5. est utilisée. La justification théorique des résultats expérimentaux dans les massifs spatiaux, se base sur la concordance des résultats théoriques et expérimentaux dans un cas plan semblable. [28]

.../...

II - Etude des contraintes d'origine thermiques dans les corps plans et spatiaux soumis à un champ thermique non-uniforme unidimensionnel

La simulation d'un champ thermique non-uniforme, fonction d'une seule coordonnées spatiale, s'accomplit à l'aide de la méthode de champ thermique unitaire.

Les contraintes thermiques dans un panneau mural contenant des ouvertures, soumis à un champ thermique θ, donné par la relation suivante, ont été étudiées [27]

$$\Theta(Z) = AZ^3 + BZ^2 + CZ + D$$

où : Z = la coordonnée spatiale dans le sens de l'épaisseur du panneau

A, B, C, D sont les constantes données

Dans [26] les contraintes thermiques dans un grand barrage en béton lors d'une répartition linéaire de température, imposée par les conditions atmosphériques ont été traitées.

Dans [27] est abordée l'étude des contraintes thermiques dans un cylindre à paroi épaisse, fermé aux extrêmités, lors d'une répartition donnée de température. Les contraintes unitaires sont obtenues en assemblant deux cylindres concentriques, l'un figé sous l'effet d'une traction axiale et une pression uniforme agissant à l'intérieur du cylindre et l'autre libre de biréfringences initiales. Les valeurs de la traction axiale et de la pression interne sont calculées pour que sur la surface d'assemblage la relation suivante soit respectée $e_{\theta\theta} = e_{zz} = \alpha\Theta$.

.../...

T. SLOT propose l'application de la méthode à l'étude des contraintes d'origine thermique dans de nombreuses pièces mécaniques lors d'une discontinuité subite de la température [32][49]. Les formes géométriques traitées sont un disque circulaire lors d'une discontinuité thermique subite au niveau du diamètre, un tube circulaire lors d'une discontinuité thermique au milieu de la largeur et un disque circulant où la transition dans la discontinuité est linéaire. La vérification des résultats expérimentaux est faite à partir des solutions théoriques respectives.

4.7. Choix des matériaux soumis au défigeage sur la base du coefficient de mérite

En photothermoélasticimétrie directe où le régime de contraintes thermiques dans le modèle se produit par la dilatation thermique réelle du matériau du modèle, causée par le champ thermique, le choix des matériaux de modèle est basé sur le coefficient de mérite Q défini comme suit;

$$Q = \frac{\alpha E}{s}$$

où : α = coefficient de dilatation thermique du matériau du modèle
E = module d'élasticité du matériau du modèle
s = constante photoélasticimétrique en contrainte normale.

En photothermoélasticimétrie par défigeage des déformations thermiques libres, la simulation de l'effet de dilatation (ou de contraction) thermique s'accomplit par les biréfringences initiales figées. Il s'ensuit qu'un matériau est d'autant plus méritoire qu'il se déforme plus par unité de frange. Donc la constante photoélasticimétrique en déformation normale (strain fringe value) peut être utilisé comme critère de mérite.

$$Q = s\,\frac{(1 + \nu)}{E}$$

.../...

Plus la valeur de Q est grande plus le matériau utilisé en défigeage sera sensible. Rappelons toutefois que la même valeur de la constante photoélasticimétrique en déformation normale est utilisée dans le choix des matériaux en photoélasticimétrique classique, mais dans le sens inverse.

Page

CHAPITRE 5 - Mise au point des techniques de défigeage..... 60

5.1. Première série d'essais : conditions d'utilisation des matériaux photoélasticimétriques..... 60

5.1.1. Etude de la possibilité d'utilisation des résines époxydes Hysol 4290 et Araldite D pour les essais de défigeage..... 60

5.1.2. Evaluation des caractéristiques photoélasticimétriques, mécaniques du matériau à la température de figeage..... 61

5.1.3. Mise au point des programmes de figeage et de défigeage..... 61

5.1.4. Etude de la validité et de la fiabilité de la méthode..... 62

5.2. Deuxième série d'essais : Influence des biréfringences parasites..... 63

5.2.1. Méthode suivie..... 63

5.2.2. Influence des biréfringences dues à l'usinage..... 63

5.2.3. Influence des biréfringences dues au collage..... 65

5.2.4. Influence des biréfringences dues au vieillissement (effet de bord)..... 65

5.3. Conclusions partielles..... 66

CHAPITRE 5 - MISE AU POINT DES TECHNIQUES DE DEFIGEAGE

On utilisera les deux matériaux Wysol 4290 et Araldite D qui, tous les deux, sont des résines époxydes. L'Wysol 4290 est fourni en plaques déjà coulées et l'Araldite D a été coulée à la température ambiante.

5.1. Première série d'essais : Conditions d'utilisation des matériaux photoélasticimétriques

Cette série d'essai a été effectuée afin de savoir si le matériau possède les caractéristiques de base pour justifier son utilisation en défigeage et mettre au point les techniques expérimentales. Elle a pour buts :

I - L'étude de la possibilité d'utilisation du matériau pour les essais de défigeage.
II - L'évaluation des propriétés mécaniques et optiques du matériau à la température de figeage.
III - La mise au point des programmes de figeage et de défigeage.
IV - L'étude de la validité et de la fiabilité de la méthode.

5.1.1. Etude de la possibilité d'utilisation des résines époxydes Hysol 4290 et Araldite D pour les essais de défigeage.

En se basant sur les paragraphes 4.2. et 4.3., on peut formuler les caractéristiques que doit posséder un matériau pour que son utilisation en défigeage soit possible :

I - La figeabilité des biréfringences.
II - La disparition complète des biréfringences figées lors du défigeage sans chargement mécanique.
III - La possibilité de collage monolithe à l'aide d'une colle ayant des caractéristiques de figeage compatibles avec celles du matériau lui-même.

.../...

Une éprouvette en traction simple a servi à étudier la défigeabilité des biréfringences, et la précision des résultats. Elle a également permis de vérifier la défigeabilité des biréfringences lorsqu'on soumet l'éprouvette au cycle thermique sans chargement mécanique. La vérification en champ de contraintes bidimensionnel a été fourni pour un disque circulaire chargé diamètralement.

5.1.2. Evaluation des caractéristiques photoélasticimétriques, mécaniques du matériau à la température de figeage

Les caractéristiques qui nous concernent sont les suivantes :

1. La constante photoélasticimétrique
2. Le module d'élasticité
3. Le coefficient de Poisson

La constante photoélasticimétrique a été obtenue à l'aide d'un disque circulaire en compression diamètrale. Le module d'élasticité est évalué par la mesure de la courbure d'une poutrelle en flexion pure et par la mesure de la variation du diamètre perpendiculaire à la ligne de chargement d'un anneau cylindrique en compression diamétrale. Le coefficient de Poisson s'obtient par la mesure de la variation de la longueur d'une éprouvette en traction simple et par la mesure de la variation du diamètre perpendiculaire à la ligne de chargement d'un disque en compression diamétrale. Nous n'avons constaté aucune dégradation de ces caractéristiques lors des figeages répétés.

5.1.3. Mise au point des programmes de figeage et de défigeage

Trois données caractérisent un programme de figeage :

I - La vitesse de réchauffement.
II - la température maximale du cycle et la durée pendant laquelle elle est maintenue.
III - La vitesse de refroidissement

Les vitesses de réchauffement et de refroidissement du modèle sont choisies de telle façon que la température du modèle soit toujours égale à la température de l'étuve, ce qui a pour effet d'éliminer l'apparition des contraintes thermiques dues à la non-uniformité de la répartition de la température dans le modèle.

.../...

Les matériaux de figeage possèdent une température critique inférieure au-dessous de laquelle des biréfringences ne sont pas figées [44]. Il s'ensuit que la non-uniformité de la répartition de température qui introduit des contraintes thermiques dans le modèle, est admissible au-dessous de cette température. Cette température critique inférieure est de l'ordre de 50 °C pour l'Araldite D et 104°C pour l'Hysol. Par conséquent nous avons utilisé des vitesses de réchauffement et de refroidissement plus grandes au-dessous de ces limites.

La température maximale de figeage doit amener les matériaux qui sont des polymères thermodurcissables et réticulés dans le plateau caoutchouteux. La durée à laquelle cette température est maintenue dépend de la sensibilité thermique du matériau et par conséquent de ses caractéristiques thermiques (telles que diffusivité thermique et coefficient de transmission calorifique superficielle), de ses dimensions et de la forme géométrique du modèle.

Nous avons fixé cette caractéristique de figeage pour un modèle d'épaisseur maximale de 70 mm et de forme prismatique, en nous basant sur les diagrammes de sensibilité thermique [48]

Les programmes de figeage ainsi déterminés, durent 48 H et 72 H respectivement pour l'Araldite D et l'Hysol 4290. Les températures de figeage sont de 100°C et 140°C respectivement pour l'Araldite D et l'Hysol 4290.

Le même programme est utilisé pour le défigeage.

5.1.4. Etude de la validité et de la fiabilité de la méthode

La validité et la fiabilité de la méthode de défigeage de déformations thermiques libres sont vérifiées sur un cas simple que fournit une poutrelle bicouche lors d'une variation uniforme de température.

. La solution théorique et analytique valable pour la partie loin des extrêmités, est connue [53]

.../...

5.2. Deuxième série d'essais : Influence des biréfringences parasites

L'obtention des éléments contenant des biréfringences initiales voulues et la reconstitution du modèle nécessitent de nombreux procédés d'usinage et de collage, et exigent par conséquent un certain temps. Il est possible que des biréfringences parasites dues à l'usinage, au collage et au vieillissement, soient introduites dans les éléments surtout lorsque la géométrie du modèle est complexe. Nous examinons dans ce paragraphe si les biréfringences parasites ont une influence sur les contraintes dans le modèle défigé.

5.2.1. Méthode suivie

Des biréfringences parasites modérées d'un seul type à la fois, sont introduites dans deux éléments qui sont initialement vierges. Ils sont collés et soumis au défigeage. L'observation du modèle composite après défigeage, indiquera si les biréfringences parasites sont redistribuées ou disparaissent complètement. Un élément individuel semblable contenant le type de biréfringence parasite étudié, est soumis au défigeage, afin de justifier l'absence des biréfringences parasites d'origine plastique dans l'élément.

5.2.2. Influence des biréfringences dues à l'usinage

Nous ne considérons que des déformations élastiques provenant de l'échauffement local qui se produit au cours de l'usinage des matériaux photoélastiques. Il est évident que si la température de la pièce usinée ne dépasse pas la température critique inférieure, qui est de l'ordre de 50°C pour l'araldite D, et 104°C pour l'hysol 4290, les biréfringences provenant des déformations élastiques dues à l'usinage, ont un caractère transitoire et disparaissent donc lorsque la pièce se refroidit à la température ambiante.

.../...

Devant la complexité de l'origine des biréfringences figées au cours de l'usinage, bornons-nous à analyser séparément les deux types suivant des biréfringences :

1) Les biréfringences figées dans la pièce par la sollicitation mécanique que provoque l'outil mécanique sur la pièce photoélastique.
2) Les biréfringences figées par l'échauffement non-uniforme, ou le refroidissement subit de la pièce usinée.

Comme nous l'avons précisé, ci-dessus, le dépassement de la température de la pièce au-delà de la température critique inférieure du matériau photoélastique, est une condition nécessaire pour que ces deux types de biréfringences soient figées.

Le premier groupe de biréfringences peut être divisé en deux sous-groupes : Elles peuvent représenter quantitativement la sollicitation mécanique introduite par l'usinage, si la température de la pièce, après avoir dépassé la valeur de la température critique inférieure, revient en-dessous de celle-ci pendant que les efforts mécaniques se maintiennent. Ce type de biréfringence donc a le même caractère que les biréfringences souhaitées et par conséquent redistribuera dans le modèle composite lors du défigeage. Les expériences effectuées sur les modèles en araldite l'ont vérifié. Les biréfringences de ce premier sous-groupe, ont été introduites à l'aide d'une meule.

D'autre part, la sollicitation mécanique momentanée et périodique que crée l'usinage, engendre un figeage partiel, si elle ne persiste pas jusqu'à ce que la température de la pièce revienne au-dessous de la température critique inférieure. Ces biréfringences appartiennent au deuxième sous-groupe cité. Elles se distribueront de la même manière que des biréfringences souhaitées. Les expériences effectuées sur des plaquettes d'araldite D de dimensions 70 × 35 dont lesquelles des biréfringences prédominantes de ce dernier type, de l'ordre de 2 fr/cm l'ont vérifié.

.../...

L'échauffement local ou le refroidissement brutal de la pièce au cours de l'usinage provoque un champ thermique transitoire qui, crée des contraintes d'origine thermique dans la pièce. Ce champ de contrainte engendre le figeage des biréfringences correspondantes. Ce champ de contraintes en vertu de son origine thermique est auto-équilibré.

Ce type de biréfringences disparaît lors du défigeage dans un modèle composite. Les expériences effectuées sur un modèle composite d'éléments prismatiques de dimensions 70 × 35 × 5, collé sur les côtés 70 × 5 contenant initialement des biréfringences de ce type de l'ordre de **2 frang/cm** l'ont vérifié.

5.2.3. Influence des biréfringences dues au collage

On peut montrer que si les champs de déformations et de contraintes dus au collage ont pour origine le retrait de la colle pendant le séchage dans le joint, ils sont proportionnels au quotient $\frac{\text{largeur}}{\text{hauteur}}$ de chaque élément (supposé prismatique et de forme rectangulaire) du modèle composite. Aussi, avons-nous choisi deux éléments vierges de forme prismatique, de dimensions 200 x 10 x 4 qui fournissent une valeur du quotient $\frac{\text{largeur}}{\text{hauteur}}$ de 20. Ils ont été collés sur la face de 200 x 4. Les biréfringences introduites lors du séchage de la colle étaient de l'ordre de 0,2 - 0,4 franges/cm.

Il a été observé que les biréfringences provenant du collage disparaissent au défigeage.

5.2.4. Influence des biréfringences dues au vieillissement (effet de bord)

Deux éléments ont été soumis au vieillissement dans l'air humide, jusqu'à ce que des biréfringences de l'ordre de 2 franges/cm pénétrant à une distance de 3 mm y apparaissent. Les éléments sont de dimensions 35 × 70 × 5. Ils ont été collés sur les faces de 70 × 5 et le modèle composite soumis au défigeage.

Il a été observé que les biréfringences de ce type disparaissent entièrement lors du défigeage.

5.3. Conclusions partielles

La caractérisation de deux epoxydes : l'araldite D et l'hysol 4290 a été faite dans ce chapitre, au point de vue de l'usage dans les essais de défigeage. La nécessité de deux cycles de figeage et défigeage consécutifs sur le même modèle, nous a amené à raccourcir leur durée, en accélérant les vitesses de refroidissement et d'échauffement pour les températures inférieures à la température critique inférieure de l'époxy. Ce faisant l'épaisseur maximale était fixée à 70 mm pour un modèle prismatique rectangulaire. La concordance des résultats expérimentaux et théoriques sur un cas simple de poutrelle bicouche a confirmé la validité de la méthode, ainsi que la compatibilité des caractéristiques de figeage de la colle utilisé avec le matériau de modèle.

Les expériences ont démontré que l'influence des biréfringences parasites provenant du vieillissement et du collage dans les éléments composants, est nulle sur le régime de contraintes dans le modèle composite ; seules celles provenant de l'usinage y ont quelques effets. Comme dans la majorité des cas, des biréfringences introduites au cours de l'usinage ont pour origine un figeage partiel des déformations dues à un échauffement local, la conservation des éléments usinés dans l'huile (ou dans un endroit sec) pendant un certain temps suffit à faire disparaître ce type de biréfringences.

TROISIEME PARTIE : ANALYSE EXPERIMENTALE DU MILIEU CONTINU PLAN ISOTROPE NON-HOMOGENE

PAGE

CHAPITRE 6 - Analyse expérimentale des contraintes d'origine thermique dans les milieux continus finis stratifiés plans..... 67

6.1. Critiques des tentatives d'essais photothermoélasticimétriques directs sur les milieux continus finis stratifiés plans..... 67

6.2. Contraintes d'origine thermique dans un milieu continu fini isotrope tricouche dont les couches diffèrent uniquement par la valeur du coefficient de dilatation thermique constante pour chaque couche, lors d'une variation uniforme de la température de l'ensemble..... 69

6.3. Particularités des contraintes d'origine thermique au niveau de l'interface dans un milieu continu stratifié plan et fini..... 73

6.4. Séparation des contraintes au niveau de l'interface par extrapolation..... 75

6.5. Contraintes d'origine thermique dans un milieu continu fini tricouche plan dont les couches diffèrent l'une de l'autre par les valeurs constantes pour chaque couche du module d'élasticité et du coefficient de dilatation thermique lors d'une variation de température constante pour chaque couche mais variant de l'une à l'autre..... 79

6.6. Contraintes d'origine thermique dans un milieu continu fini plan tricouche pour lequel :

- le module d'élasticité varie d'une couche à l'autre et varie à l'intérieur d'une même couche..
- le coefficient de dilatation thermique et la variation de température varient d'une couche à l'autre, mais sont constants dans chaque couche
- le coefficient de Poisson est constant pour les 3 couches..... 85

6.7.Résultat théoriques et expérimentau 92

TROISIEME PARTIE

ANALYSE EXPERIMENTALE DU MILIEU CONTINU FINI ISOTROPE NON-HOMOGENE

CHAPITRE 6 - ANALYSE EXPERIMENTALE DES CONTRAINTES D'ORIGINE THERMIQUE DANS LES MILIEUX CONTINUS FINIS STRATIFIES PLANS

6.1. Critiques des tentatives d'essai photothermoélasticimétrique direct sur les milieux continus finis stratifiés plans

La condition de compatibilité exprimée sous forme de fonction de contraintes 2.2 (5), des conditions aux limites et aux interfaces 2.3 (5a), 2.3 (1a), 2.3 (2a), 2.3 (3a), 2.4 (4a) indiquent que la différence des valeurs du produit $\alpha\bullet$ relatif aux deux milieux continus sur chaque rive de l'interface, est le facteur décisif créant des contraintes d'origine thermique dans un tel milieu continu. Du fait de la difficulté au point de vue expérimental, de maintenir un gradient thermique à forte discontinuité au niveau de l'interface dans un modèle photoélasticimétrique, c'est la différence des valeurs des coefficients de dilatation thermique, $(\alpha_1 - \alpha_2)$ qui sera utilisée. Or, les matériaux couramment employés en photothermoélasticimétrie (araldites, hysols, etc...) sont de hauts polymers, ils disposent des valeurs de coefficient de dilatation thermique très proches l'une de l'autre, qui sont environ de $70 \times 10^{-6}/°C$ à la température ambiante. Donc, afin de créer un régime de contraintes suffisamment important pour permettre sa mesure précise au moyen de l'effet biréfringent accidentel, un gradient thermique important, sinon une variation uniforme de température très élevée, de l'ensemble du modèle sera nécessaire. Ceci n'est pas toujours possible car la dépendance thermique des propriétés physiques et optiques du matériau du modèle intervient (3.2.2.).

.../...

Le problème des matériaux photoélasticimétriques ainsi posé, semble être la raison pour laquelle le nombre de travaux sur l'étude photothermoélasticimétrique des contraintes d'origine thermique dans les milieux continus stratifiés plans est peu important.

On ne voit que deux études qui peuvent se classer dans ce domaine.

La première [12] concerne des contraintes d'origine thermique dans une poutrelle tricouche, soumise à un abaissement uniforme de température de 60°C réalisé par la circulation d'un courant d'air froid dans un caisson thermique à parois transparentes. La poutrelle à géométrie longitudinale symétrique se compose d'une couche de plastique butyrale polyvinyl et deux couches enveloppantes de verre recuit.

On ignore la sensibilité thermique des propriétés physiques et optique de ces matériaux photoélasticimétriques dans le domaine de température (de 20°C à - 40°C). La concentration des contraintes aux extrêmités interfaciales de la poutrelle est comparée à une solution théorique. Les lieux et les valeurs des contraintes maximales de l'expérience ne s'accordent pas avec cette solution.

L'apparition des contraintes longitudinales aux extrêmités interfaciales de la poutrelle et l'impossibilité de procéder aux mesures des variations d'épaisseur à l'intérieur froid du caisson thermique, ont limité le choix des méthodes de séparation des contraintes. La seule méthode utilisable dans ces conditions, celle de l'intégration suivant l'isostatique de Lamé - Maxwell est utilisée. Cette méthode fastidieuse semble avoir contribué à la précision des résultats expérimentaux.

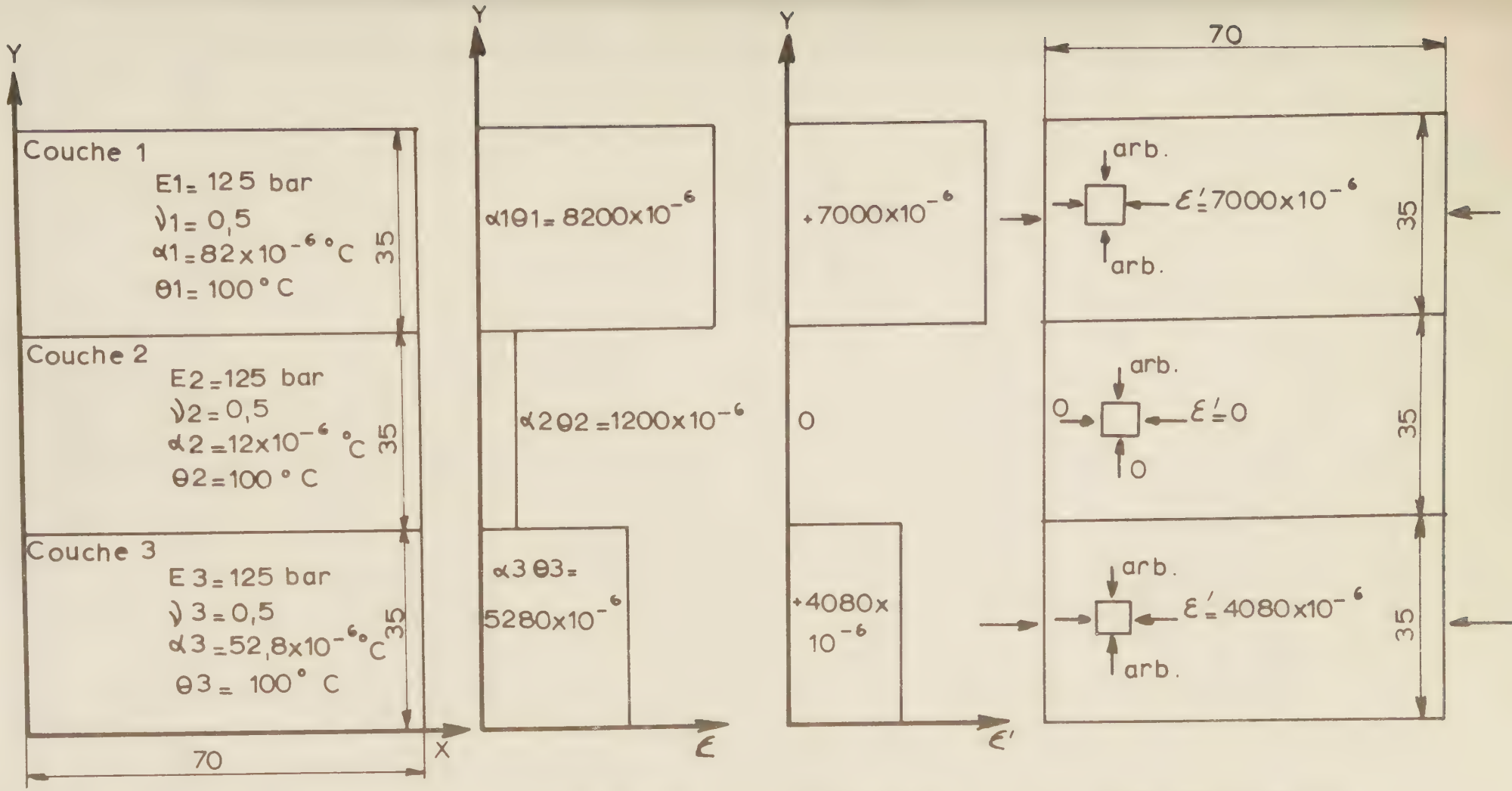
La deuxième étude [3] emploie un modèle en hysol, qui contient une inclusion cylindrique d'aluminium. Les contraintes thermiques lors d'une variation uniforme et d'une variation parabolique de la température du modèle composite sont étudiées.

.../...

6.2. Contraintes d'origine thermique dans un milieu continu fini isotrope tricouche dont les couches diffèrent uniquement par la valeur du coefficient de dilatation thermique constante pour chaque couche, lors d'une variation uniforme de la température de l'ensemble

La figure montre la géométrie du milieu continu tricouche fini de dimensions : 70 x 105 x 4 et les phases successives de figeage des biréfringences initiales et de défigeage du modèle composite.

Le module d'élasticité et le coefficient de Poisson de toutes les couches sont les mêmes ; le coefficient de dilatation thermique diffère d'une couche à l'autre. Le milieu continu fini est soumis à une variation uniforme de température.



CARACTERISTIQUES PHYSIQUES DU MILIEU CONTINU TRICOUCHE PLAN FINI.

Diagramme de $\varepsilon = \alpha\theta$

Diagramme de ε' avec $\varepsilon_0 = 1200 \times 10^{-6}$

BIREFRINGENCES FIGEES DANS LES TROIS COUCHES

PHASES DE FIGEAGE ET DE DEFIGEAGE

FIGURE 6·2(i)

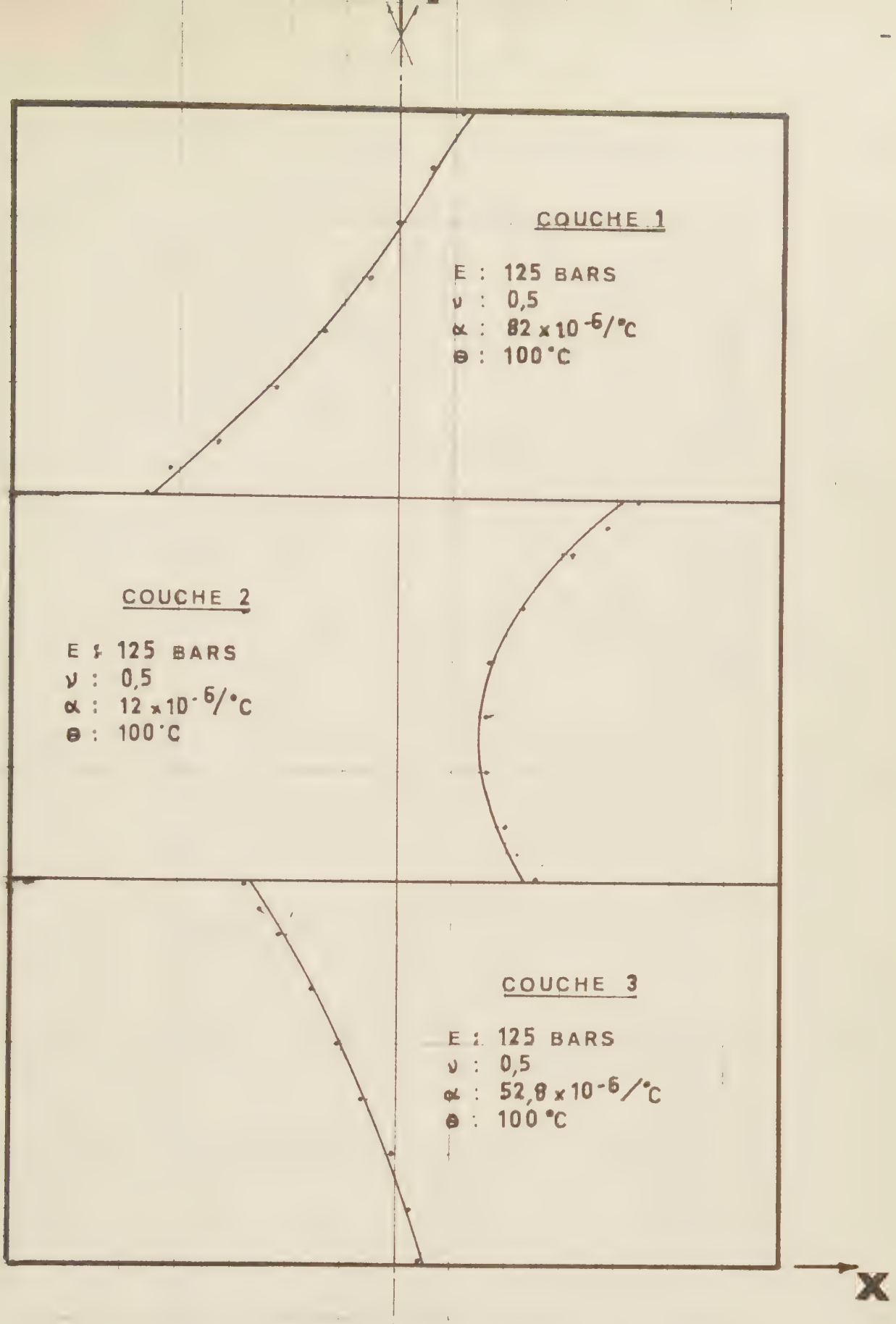


FIGURE 6.2(ii)

MILIEU HOMOGENE PAR MORCEAUX

REPARTITION DE LA COMPOSANTE DE CONTRAINTE σ_{xx} SUIVANT L'AXE DE SYMETRIE

EXPERIENCE ..... SOLUTION NUMERIQUE ———

σ_{xx}

ECHELLE : 1 CM = 0,1 BAR

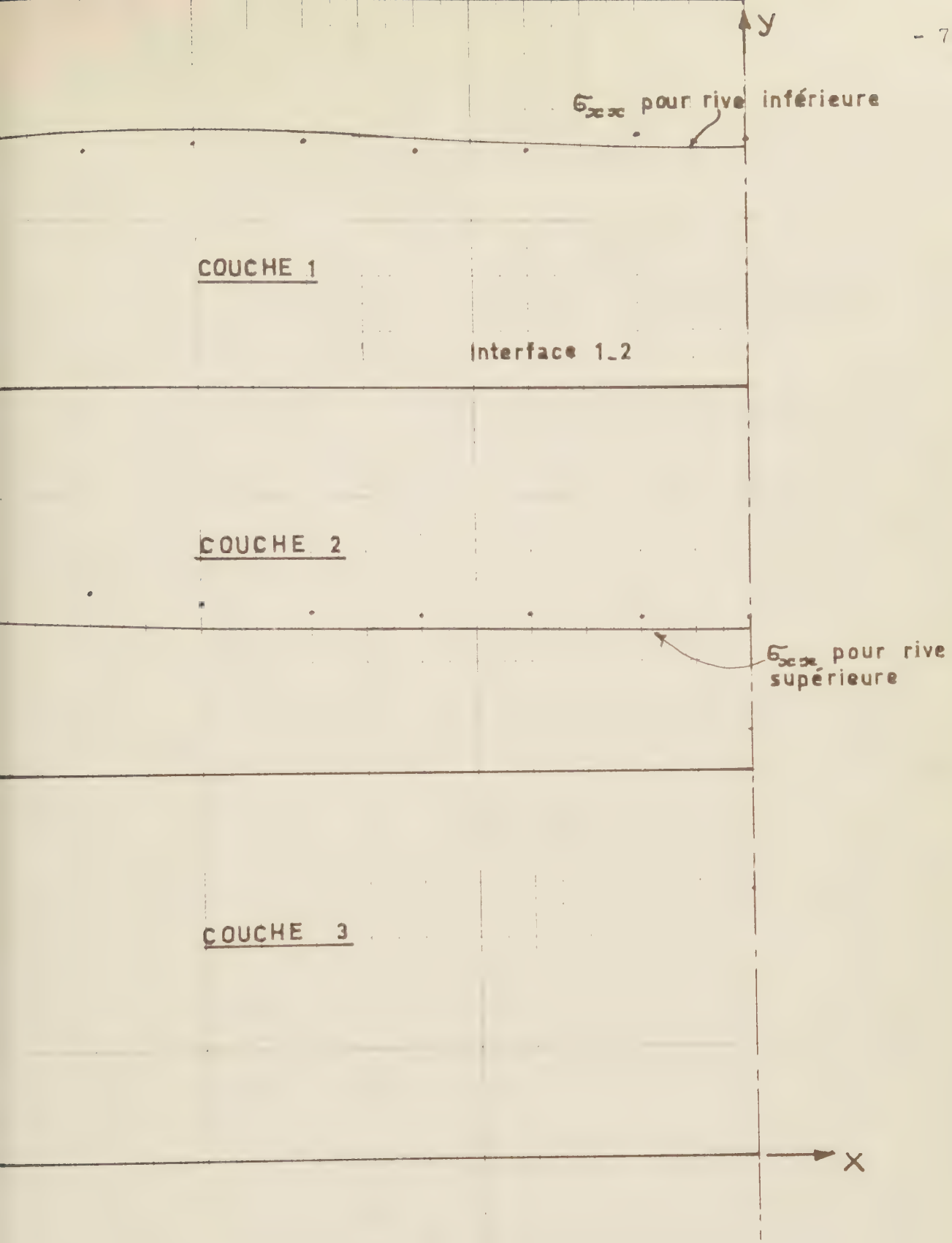


FIGURE 6.2.(iii)

REPARTITION DE LA COMPOSANTE σ_{xx}
A CHAQUE RIVE DE L INTERFACE 1_2

SOLUTION NUMERIQUE ——— EXPERIENCE .....

ECHELLE 1 CM = 0,1 bar

6.3. Particularités des contraintes d'origine thermique au niveau de l'interface dans un milieu continu stratifié plan et fini

I - Discontinuité de la composante de contrainte normale parallèle à l'interface à travers l'interface et les conséquences

Un milieu continu stratifié suppose la continuité des contraintes et des déformations agissant sur la surface interfaciale entre deux couches voisines. Par conséquent les composantes σ_{xy} et σ_{yy} sont continues à travers l'interface. Ces conditions exprimées sous forme de la fonction de contrainte respectivement ϕ et ψ de la couche supérieure et inférieure de l'interface s'écrivent :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial x^2}$$

Ces deux conditions valables au niveau de l'interface n'engendrent pas l'égalité, à ce niveau, des dérivées secondes de ϕ et de ψ par rapport à y, c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y^2} \neq \frac{\partial \psi}{\partial y^2}$$

Donc , la composante de contrainte σ_{xx} se montrera discontinue à travers l'interface. Cela entraînera une discontinuité des directions des contraintes principales à travers l'interface.

Dans l'image photoélasticimétrique, ce fait se traduit par l'apparition de deux séries de valeurs de l'ordre de franges et de paramètre d'isocline à chaque rive de l'interface.

II - Diffraction des isoclines sur l'interface

La "diffraction" des isoclines sur l'interface provient de la faible variation des directions des contraintes principales le long de l'interface. Cet effet nous empêche de déterminer avec précision le paramètre d'isocline aux deux rives de l'interface.

.../...

En outre,

$$\sigma_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\phi = A\, n \sin 2\phi$$

où :

σ_{xy} = composante de contrainte de cisaillement

σ_1, σ_2 = contraintes principales

A = constante

n = valeur de frange

ϕ = direction de contrainte principale σ_1

d'où :

$$\frac{\Delta \sigma_{xy}}{\sigma_{xy}} = \frac{\Delta n}{n} + \frac{2\Delta\phi}{tg\ 2\phi}$$

On observé que la valeur de ϕ aux deux rives de l'interface est très proche de 90°, ce qui donnera tg 2 $\phi \ll 1$. Par conséquent, d'après les relations ci-dessus, une erreur dans la lecture de ϕ agira fortement sur la valeur de σ_{xy} bien que la valeur de ϕ ne change guère au long de l'interface.

III - Réapparition de la composante de contrainte normale parallèle à l'interface à l'extrêmité de l'interface

La composante de contrainte normale perpendiculaire au bord libre s'annule car celui-ci n'est pas soumis aux faces extérieures. Mais aux points qui sont communs à la fois au bord libre et à l'interface cette composante réapparaît. Cela empêche toute utilisation de la méthode des différences du cisaillement pour la séparation des contraintes au niveau de l'interface.

Cependant, nous proposons au paragraphe 6.4., une méthode d'extrapolation pour obtenir les contraintes à l'interface.

.../...

6.4. Séparation des contraintes au niveau de l'interface par extrapolation

La séparation des contraintes suivant deux lignes AA' et BB' (figure 6.4b) près de l'interface et se trouvant à une distance d de chaque côté de celle-ci, se fera par la méthode des différences du cisaillement. Le programme de dépouillement des données photoélasticimétriques ST 4, établi au Centre Expérimental de Recherche et d'Etudes du Bâtiment et des Travaux Publics, est utilisé.

Donc on aura les valeurs des composantes σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} et par suite $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}$, $\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}$ suivant les deux lignes AA' et BB'.

Notons qu'on remplace les dérivées partielles par leur différence finie :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{\Delta \sigma_{xx}}{\Delta x} \text{ ; etc...}$$

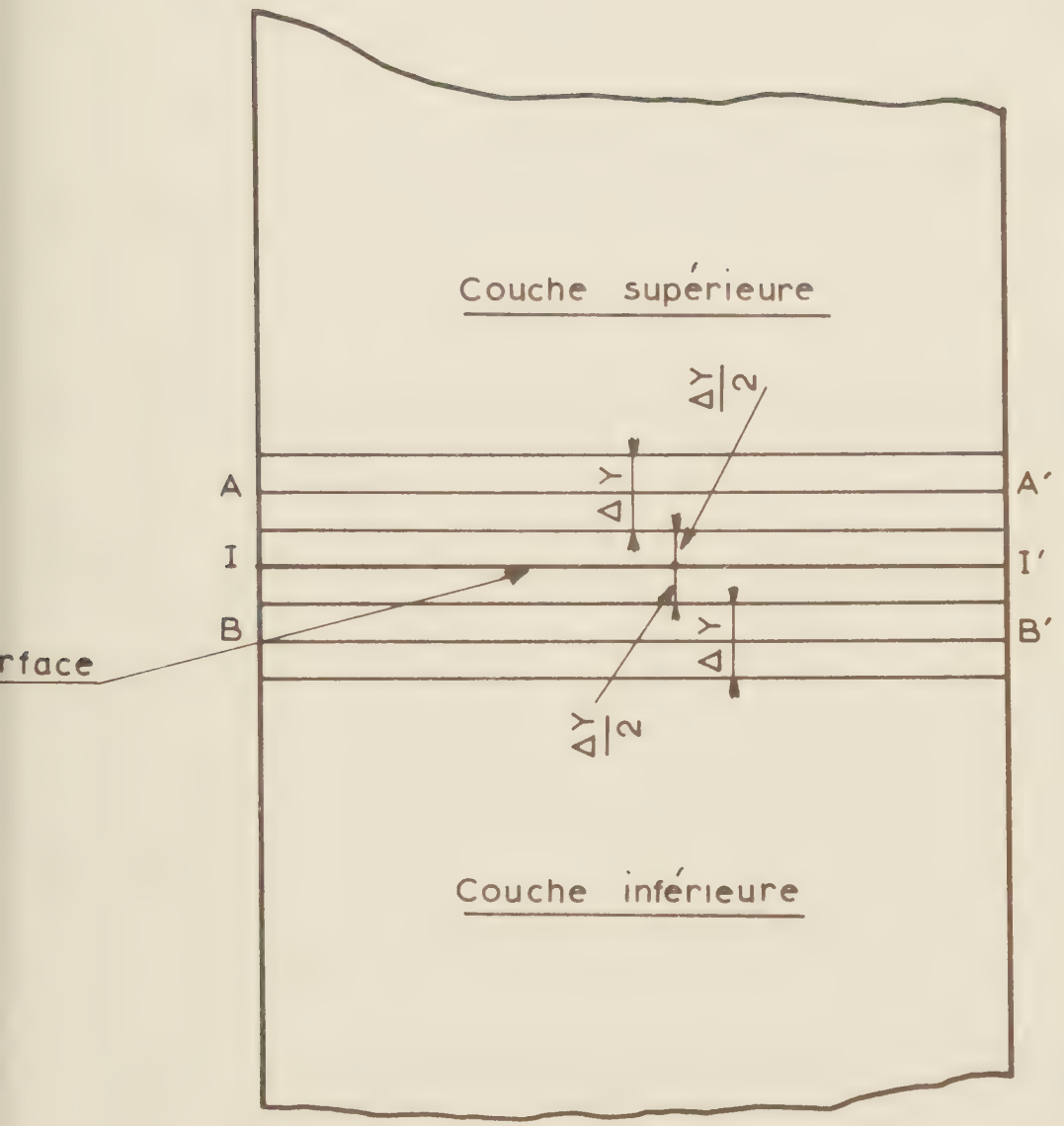
Les équations d'équilibre donnent, en négligeant les forces massiques :

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = - \frac{\Delta \sigma_{xx}}{\Delta x} \qquad 6.4\ (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = - \frac{\Delta \sigma_{xy}}{\Delta x} \qquad 6.4\ (2)$$

Avec ces gradients de σ_{xy} et σ_{xx} dans le sens de y et leur valeur sur AA' et BB', on extrapolera les valeurs de σ_{yy} et σ_{xy} au niveau de l'interface.

.../...



EXTRAPOLATION DES CONTRAINTES AU NIVEAU DE L INTERFACE.

FIGURE 6_4 (i)

C'est-à-dire qu'on aura :

$$(\sigma_{xy})_{\text{sur } II'} = -\frac{1}{2}\left[(\sigma_{xy})_{\text{sur } AA'} + \left(\frac{\Delta\sigma_{xx}}{\Delta x}_{\text{sur } AA'}\right) \cdot \Delta y + (\sigma_{xy})_{\text{sur } BB'} - \left(\frac{\Delta\sigma_{xx}}{\Delta x}_{\text{sur } BB'}\right)\Delta y\right]$$

$$(\sigma_{yy})_{\text{sur } II'} = -\frac{1}{2}\left[(\sigma_{yy})_{\text{sur } AA'} + \left(\frac{\Delta\sigma_{xy}}{\Delta x}_{\text{sur } AA'}\right) \cdot \Delta y + (\sigma_{yy})_{\text{sur } BB'} - \left(\frac{\Delta\sigma_{xy}}{\Delta x}_{\text{sur } BB'}\right)\Delta y\right]$$

en prenant la moyenne de deux extrapolations effectuées au-dessus et en-dessous de l'interface.

Extrapolation de σ_{xx}

L'équation d'équilibre donne, de nouveau :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$$

donc,

$$(\sigma_{xx})_{x = x} = -\int_0^x \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \cdot dx + (\sigma_x)_{x = o}$$

En calculant la dérivée partielle par rapport à y de l'intégrale,

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}\right)_{x = x} = -\int_0^x \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2}\right)_{x = x} \cdot dx \qquad 6.4\ (3)$$

En remplaçant la dérivée seconde $\left(\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2}\right)_{x = x}$ par sa dérivée droite, on a pour la couche inférieure :

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2}\right)_{\text{sur } BB'} = \frac{\left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right)_{II'} - \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right)_{BB'}}{\Delta y}$$

.../...

en utilisant les relations 6.4 (1) ; 6.4 (2) et aussi la relation suivante obtenue par la continuité de σ_{xy} dans le sens de y

$$\text{à savoir : } \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right)_{II'} = \frac{(\sigma_{xy})_{AA'} - (\sigma_{xy})_{BB'}}{2\Delta y} = P(x)$$

$$\text{on a : } \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2}\right)_{\text{sur } BB'} = \frac{P(x) + Q(x)}{\Delta y} \qquad 6.4\ (4)$$

$$\text{où : } Q(x) = \left(\frac{\Delta \sigma_{xx}}{\Delta x}\right)_{\text{sur } BB'}$$

En rapportant la relation 6.4 (4) dans l'intégrale 6.4 (3) qui sera remplacée par la somme lors du passage aux différences finies, on a :

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}\right)_{x \text{ sur } BB'} = - \sum_{x=0}^{x=x} \frac{P(x) + Q(x)}{\Delta y} \cdot \Delta x$$

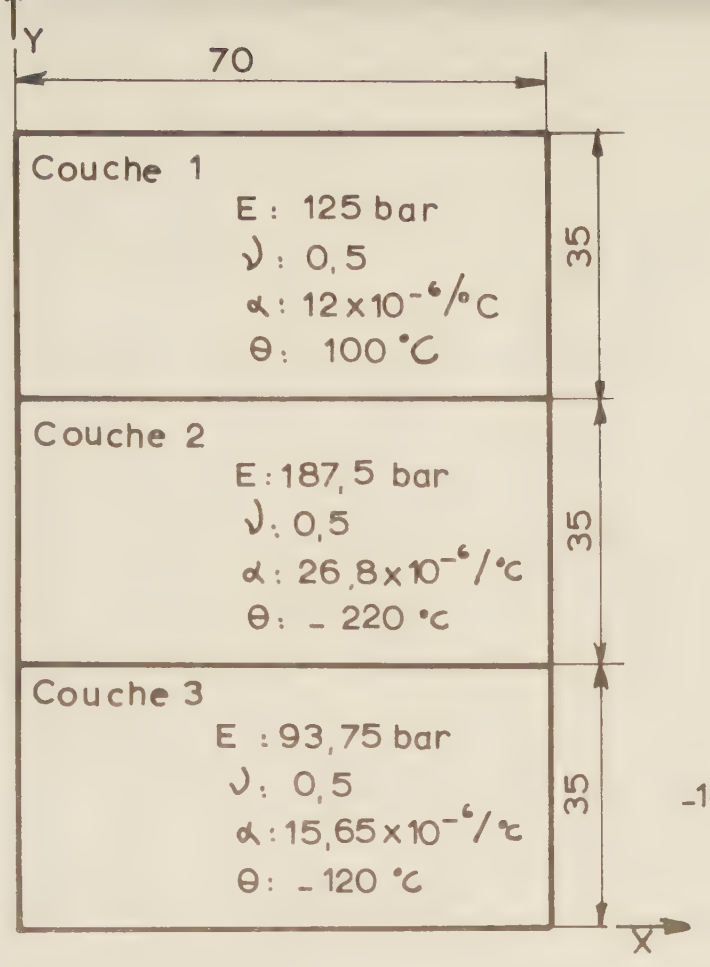
En commençant du bord libre où $\sigma_x = 0$, on calculera la dérivée seconde $\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2}$ sur BB' qui sera utilisée pour le calcul de la dérivée $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} = \frac{\Delta \sigma_{xx}}{\Delta y}$ par sommation.

$$\text{Donc : } (\sigma_{xx})_{\text{sur } II'} = (\sigma_{xx})_{BB'} + \left(\frac{\Delta \sigma_{xx}}{\Delta y}\right)_{\text{sur } BB'} \cdot \Delta y$$

Le même procédé est applicable à l'extrapolation des valeurs de σ_{xx} à la rive supérieure.

6.3. Contraintes d'origine thermique dans un milieu continu fini tricouche plan dont les couches diffèrent l'une de l'autre par les valeurs constantes pour chaque couche du module d'élasticité et du coefficient de dilatation thermique lors d'une variation de température constante pour chaque couche mais variant de l'une à l'autre

La géométrie du milieu continu plan tricouche est indiquée sur la figure 6.5 (i). Ses dimensions planes sont 105 x 70. Le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique sont constants à l'intérieur d'une couche, mais diffèrent d'une couche à l'autre. Le coefficient de Poisson est constant pour tout le milieu continu. Les modules d'élasticité sont dans le rapport de 4 : 6 : 3 et ont été modelés par la variation de l'épaisseur dans le même rapport comme indiquée au paragraphe 2.4.



CARACTERISTIQUES PHYSIQUES
DU MILIEU CONTINU FINI
TRICOUCHE PLAN
(Modèle théorique)

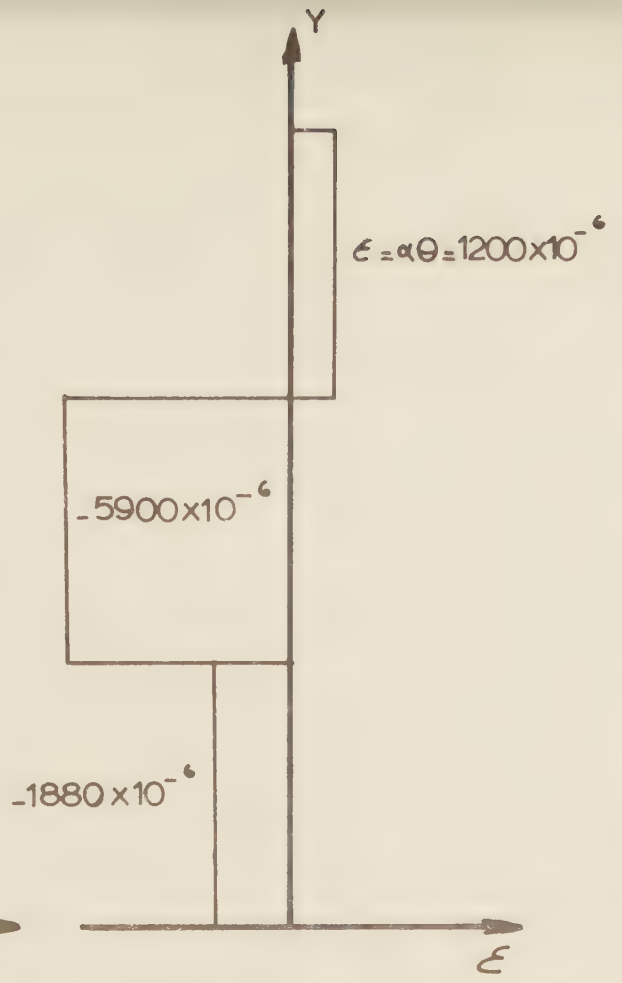


Diagramme de $\epsilon = \alpha\theta$

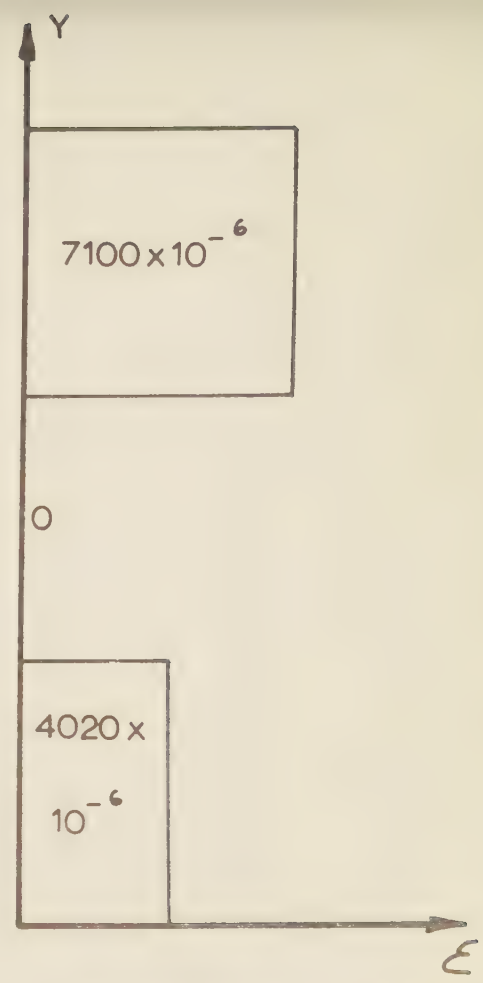


Diagramme de $\epsilon' = \epsilon - \epsilon_0$
avec $\epsilon_0 = -5900 \times 10^{-6}$

E : Module d'élasticité
ν : Coefficient de poisson
α : Coefficient de dilatation
θ : Variation de température

FIGURE N° 6.5(j)

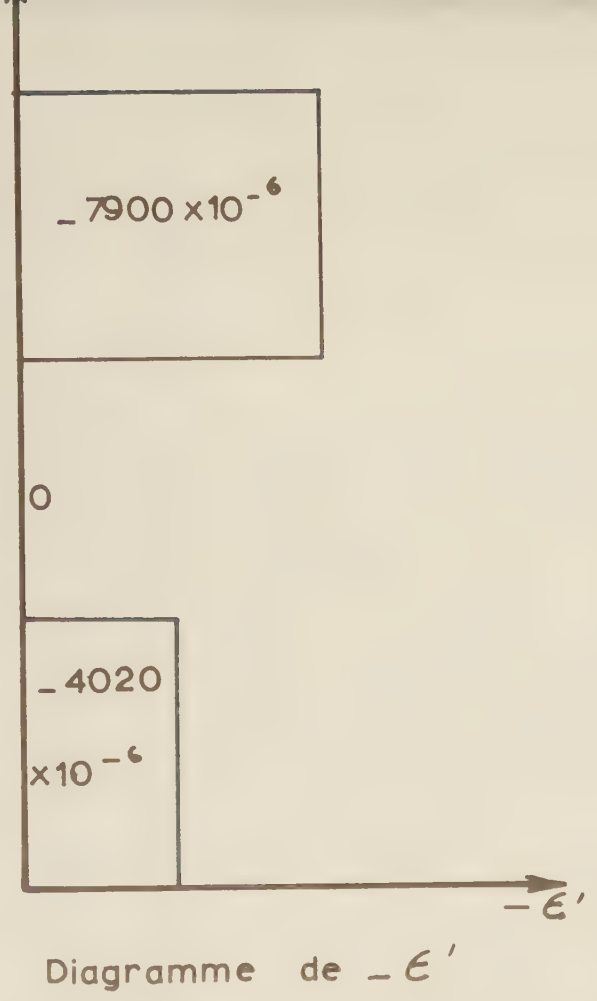
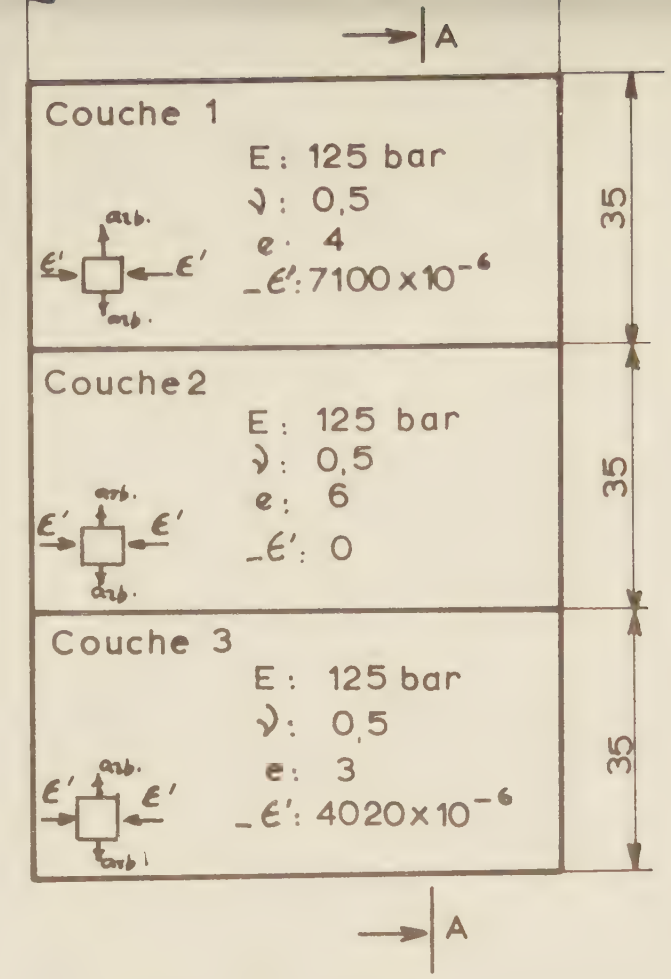
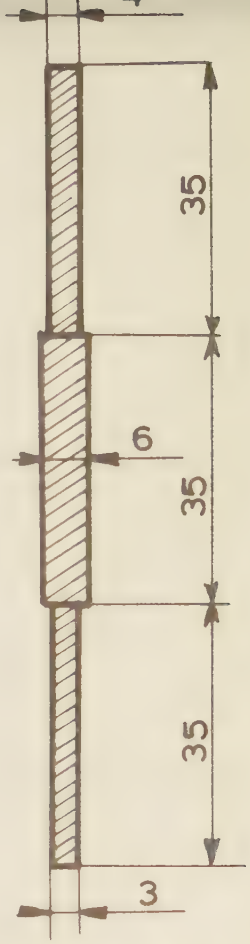


Diagramme de $-\epsilon'$

BIREFRINGENCES INITIALES FIGEES



MODELE EXPERIMENTALE (POUR DEFIGEAGE)



COUPE A-A

E : Module d'élasticité
e : Epaisseur plan
$-\epsilon'$: Birefringence initiale figée.

MODELAGE DU MODULE D ELASTICITE, DU COEFFICIENT DE DILATATION THERMIQUE ET DE LA TEMPERATURE

FIGURE N° 6·5 (ii)

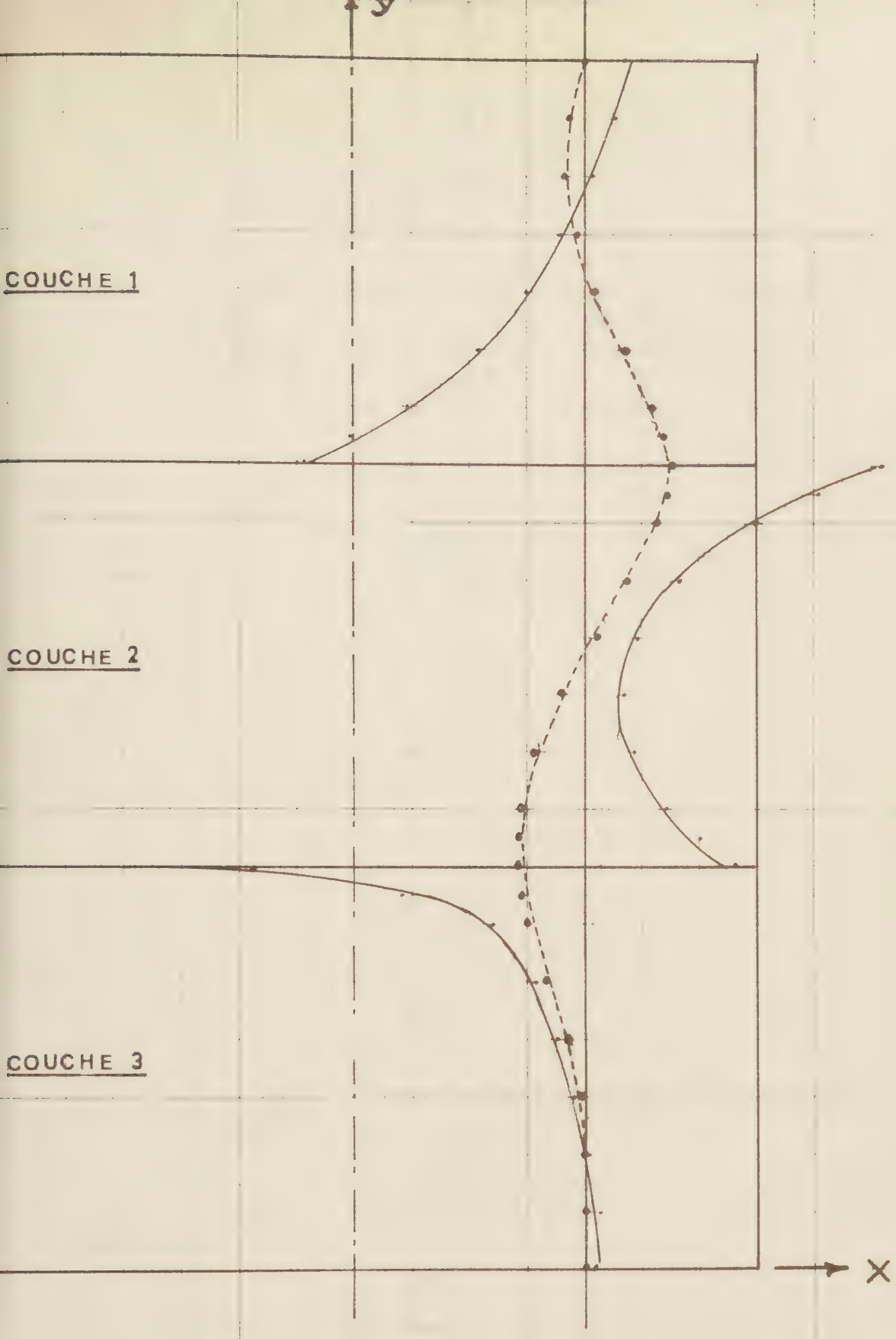


FIGURE 6.5(iii)

REPARTITION DES COMPOSANTES σ_{xx} ET σ_{xy} SUR UNE SECTION GENERALE

	EXPERIENCE	SOLUTION NUMERIQUE
σ_{xx}	• •	———
σ_{xy}	o o	- - - - - - - -

ECHELLE: 1 CM = 0,1 BAR

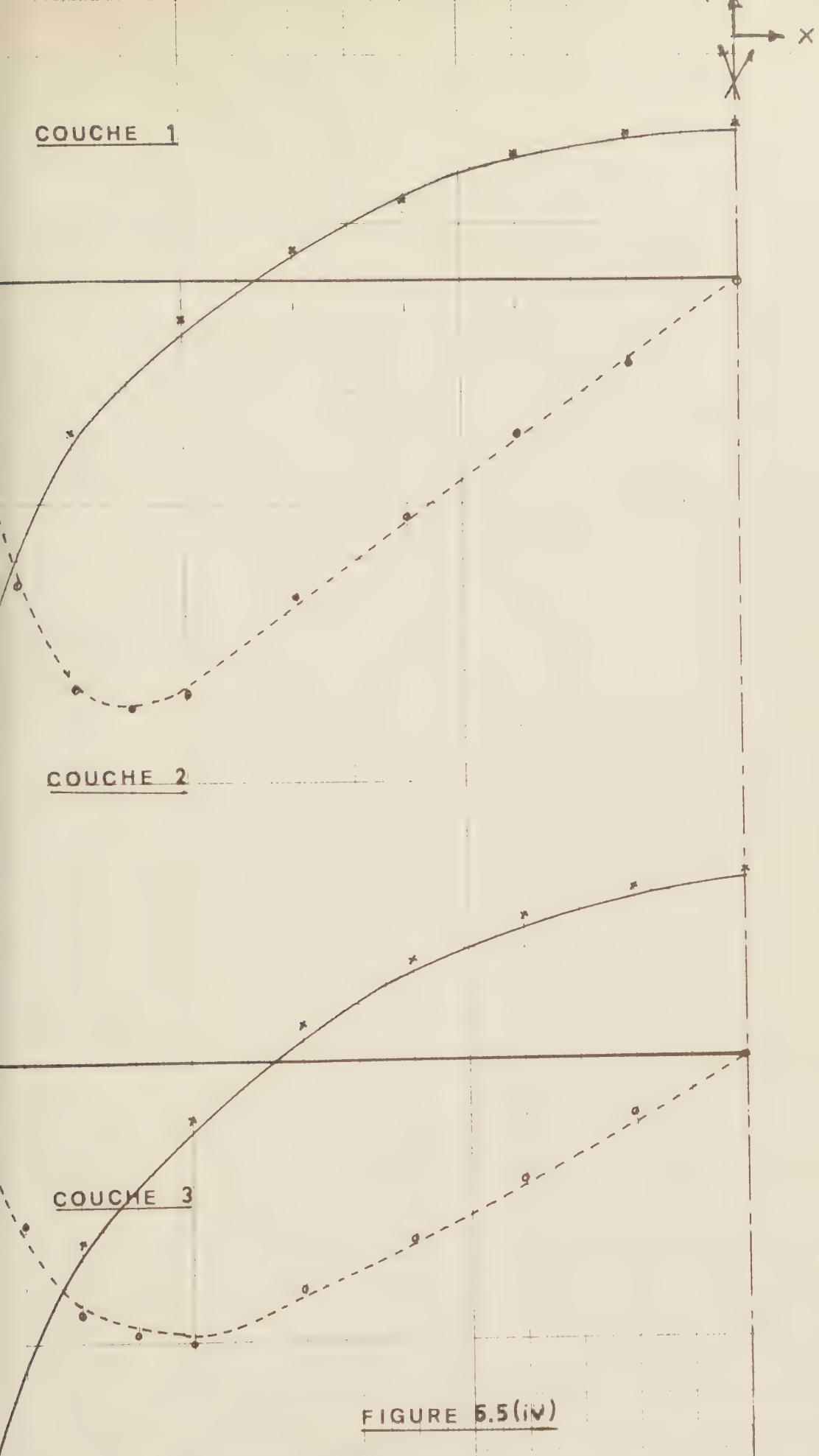


FIGURE 5.5(iv)

REPARTITION DES CONTRAINTES σ_{xy} ET σ_{yy} SUR LES INTERFACES

	EXPERIENCE	SOLUTION NUMERIQUE
σ_{xy}	o o	- - - - - - - -
σ_{yy}	x x	———

ECHELLE : 1 CM = 0.25 BAR

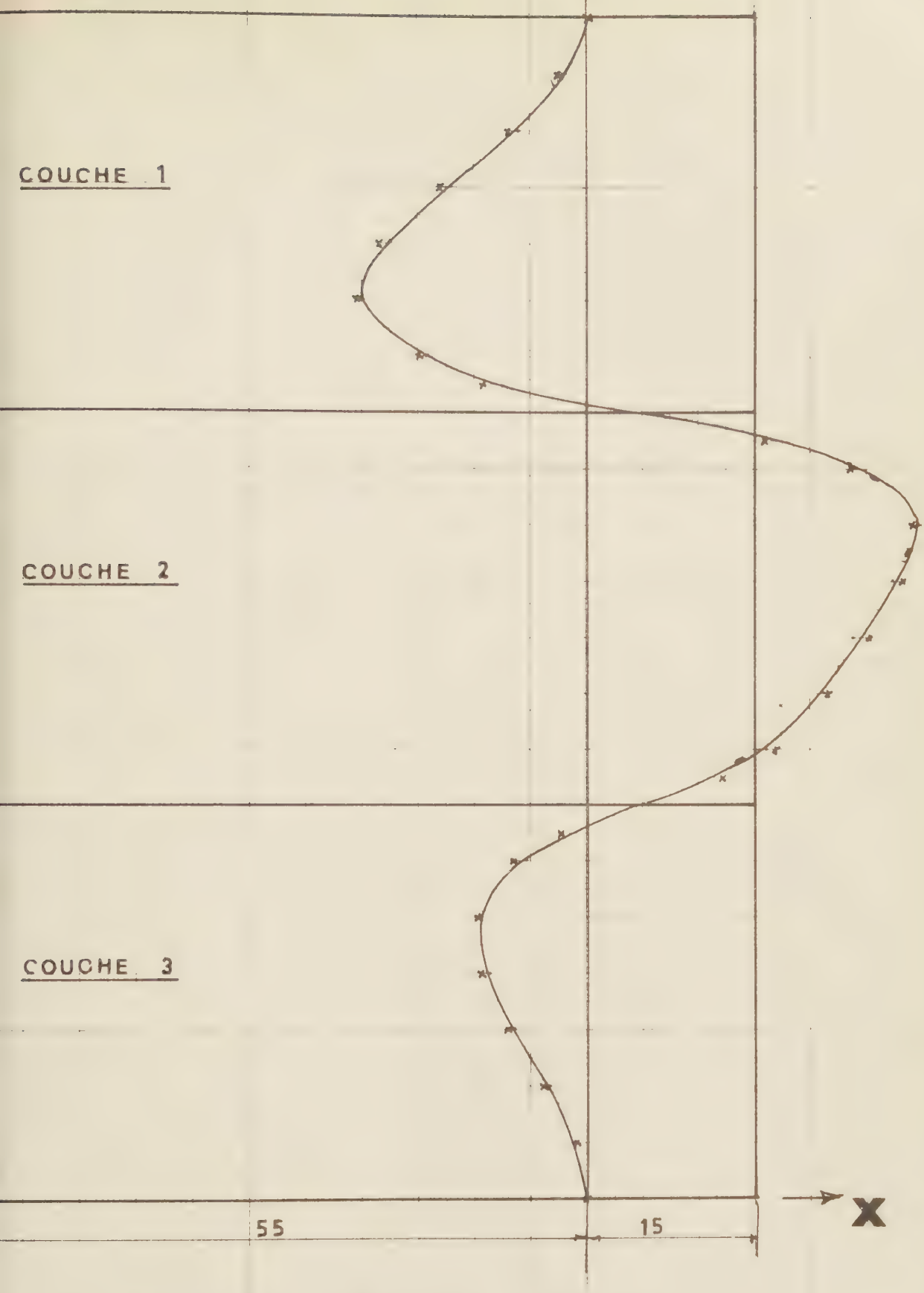


FIGURE 6.5(v)

REPARTITION DE LA CONTRAINTE σ_{yy} SUR UNE SECTION GENERALE

——— SOLUTION NUMERIQUE

× × × × × EXPERIENCE

ECHELLE : 1 CM ↔ 0.01 BAR

6.6. Contraintes d'origine thermique dans un milieu continu fini plan tricouche pour lequel - le module d'élasticité varie d'une couche à l'autre et varie à l'intérieur d'une même couche

- Le coefficient de dilatation thermique et la variation de température varient d'une couche à l'autre, mais sont constants dans chaque couche

- Le coefficient de Poisson est constant pour les 3 couches

La figure 6.6 (i) donne la géométrie et les caractéristiques du milieu continu fini plan tricouche. Les trois couches possèdent les propriétés suivantes :

Couche 1 : Dimensions (en cm): $7 \times 3,5$
Module d'élasticité (en bar) : $E = 26,8y - 93,95$
Coefficient de Poisson : $\nu = 0,455$
Coefficient de dilatation thermique par °C : $\alpha = 12 \times 10^{-6}$
Variation de température (°C) : = 100

Couche 2 : Dimensions (en cm) : $7 \times 3,5$
Module d'élasticité (en bar) donné par : $(E - 26200)^2 + 62,4 \times 10^4 (x - 3,5)^2 = 68,6 \times 10^5$
Coefficient de dilatation thermique par °C : $\alpha = 47 \times 10^{-6}$
Coefficient de Poisson : $\nu = 0,455$
Variation de température (°C) : = 200

Couche 3 : Dimensions (en cm) : $7 \times 3,5$
Module d'élasticité (en bar) : $E = 150$
Coefficient de Poisson : $\nu = 0,455$
Coefficient de dilatation thermique par °C : $\alpha = 100 \times 10^{-6}$
Variation de température (°C) : = 49,8

.../...

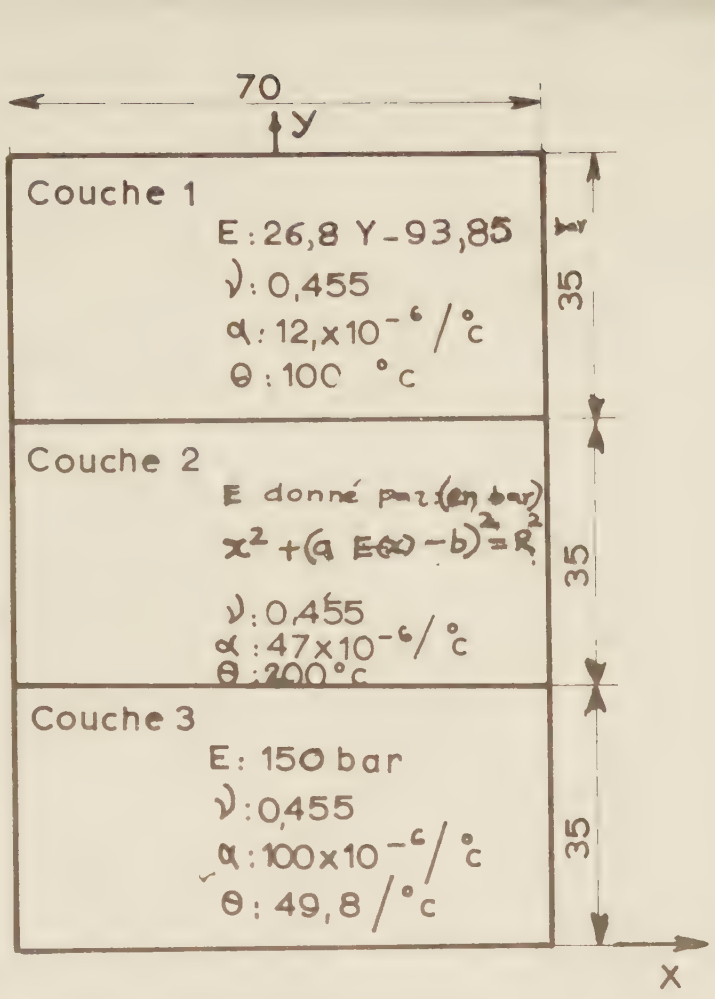
La figure 6.6 (ii) montre aussi les différentes phases de figeage et de défigeage. L'usinage des différentes couches à la forme géométrique correspondant à la loi de variation du module d'élasticité, est fait après le figeage des biréfringences initiales.

1 - Biréfringences initiales figées

	Couche 1	Couche 2	Couche 3
α	12×10^{-6}°C	47×10^{-6}°C	100×10^{-6}°C
θ	100°C	200°C	49,8°C
ε=α	1200×10^{-6}	9400×10^{-6}	4980×10^{-6}
	Si $\varepsilon_o = 9400 \times 10^{-6}$ (algébriquement plus grand de ε)		
	$- 8200 \times 10^{-6}$	0	$- 4420 \times 10^{-6}$
	Donc biréfringences initiales à figer sont $- \varepsilon'$		
rin-s ales s	8200×10^{-6}	0	4420×10^{-6}
aintes action saire module sticité laques ldite)	$8200 \times E \times 10^{-6}$	0	$4420 \times E \times 10^{-6}$

2 - Modelage du module d'élasticité

	Couche 1	Couche 2	Couche 3
	$0 \leqslant x \leqslant 7$	$0 \leqslant x \leqslant 7$	$0 \leqslant x \leqslant 7$
	$7 \leqslant y \leqslant 10,5$	$3,5 \leqslant y \leqslant 7$	$0 \leqslant y \leqslant 3,5$
r)	$26,8\ y - 93,85$	$x^2 + \left[E/750 - (33,315)^2\right] = (33,19)^2$	150



CARACTERISTIQUES PHYSIQUES

DU MILIEU CONTINU FINI

TRICOUCHE PLAN

(Modèle théorique)

avec : R = 33,19

a = 1/750

b = 33,315

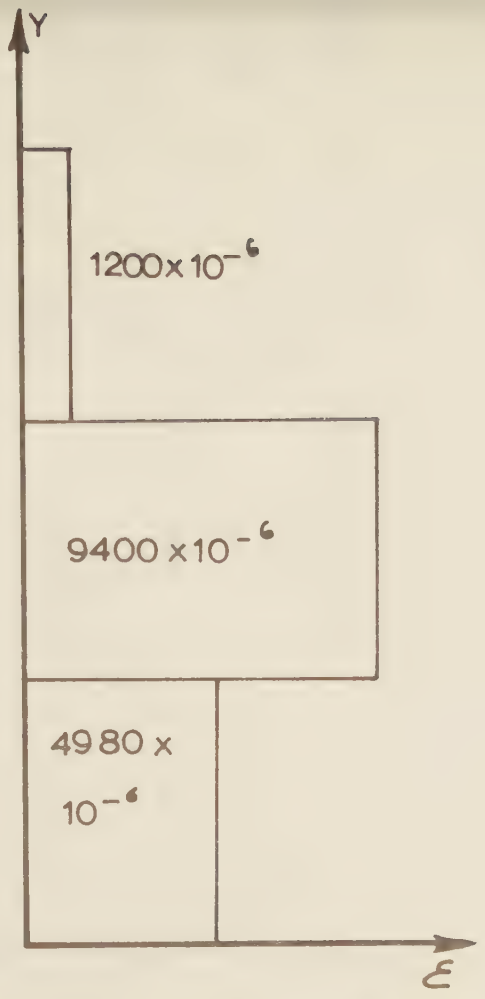


Diagramme de $\epsilon = \alpha\theta$

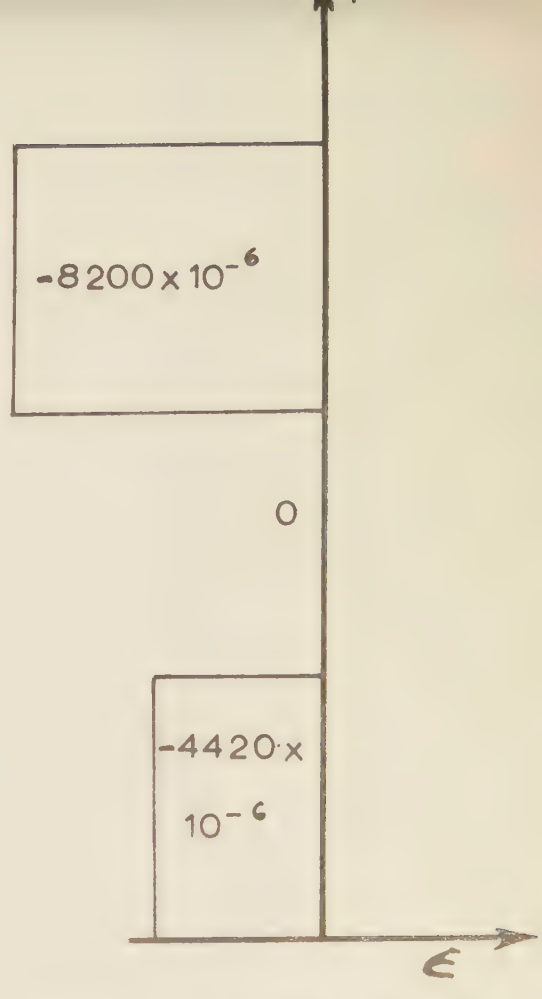


Diagramme de $\epsilon' = \epsilon - \epsilon_0$

avec $\epsilon_0 = 9400 \times 10^{-6}$

FIGURE N° 6·6(i)

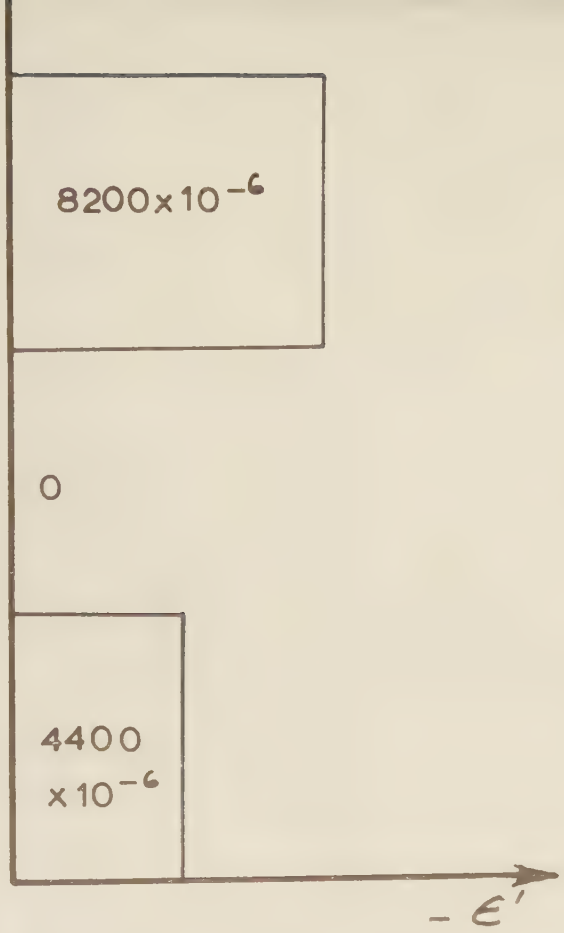
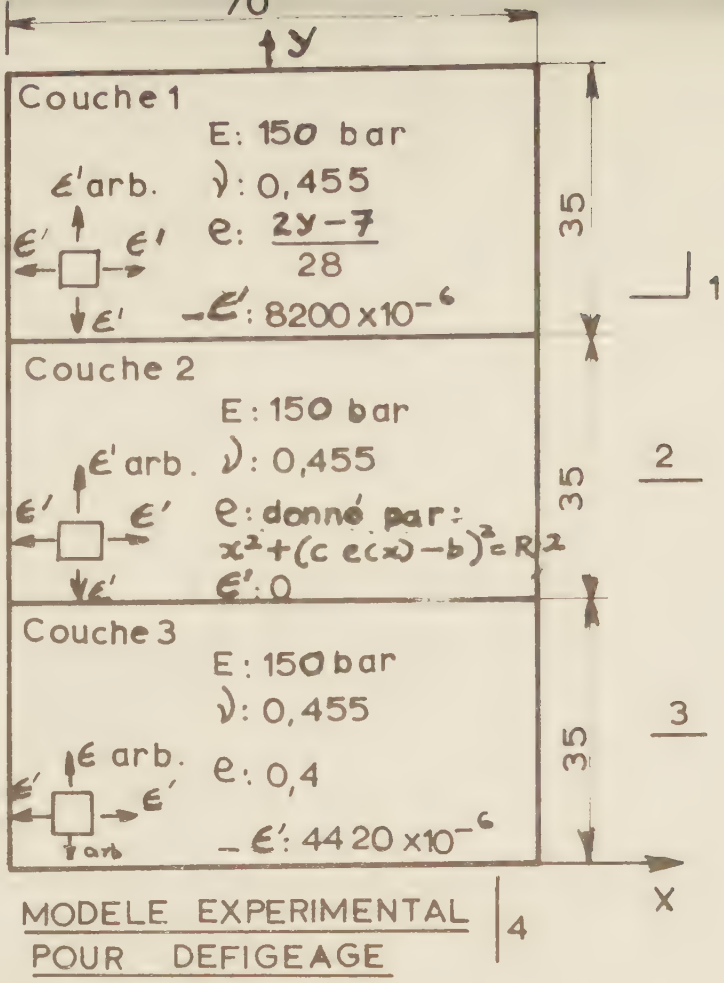
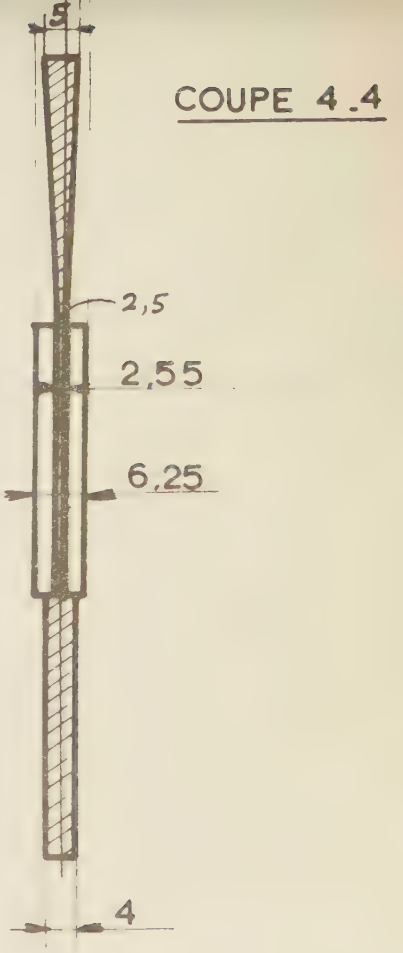


Diagramme de $-\epsilon'$

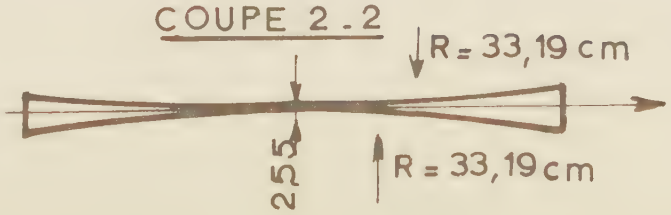
BIREFRINGENCES INITIALES FIGEES

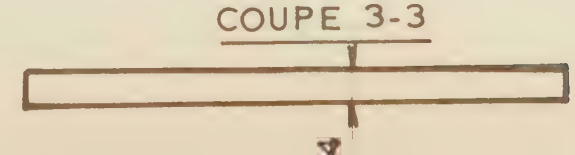


MODELE EXPERIMENTAL POUR DEFIGEAGE



MODELE DU MODULE D ELASTICITE ET LES BIREFRINGENCES INITIALES FIGEES.





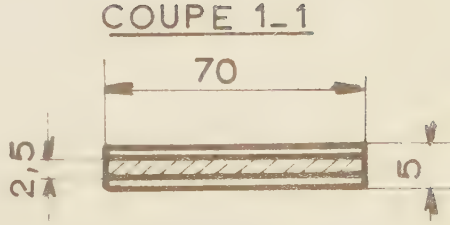


FIGURE N° 6·6(ii)

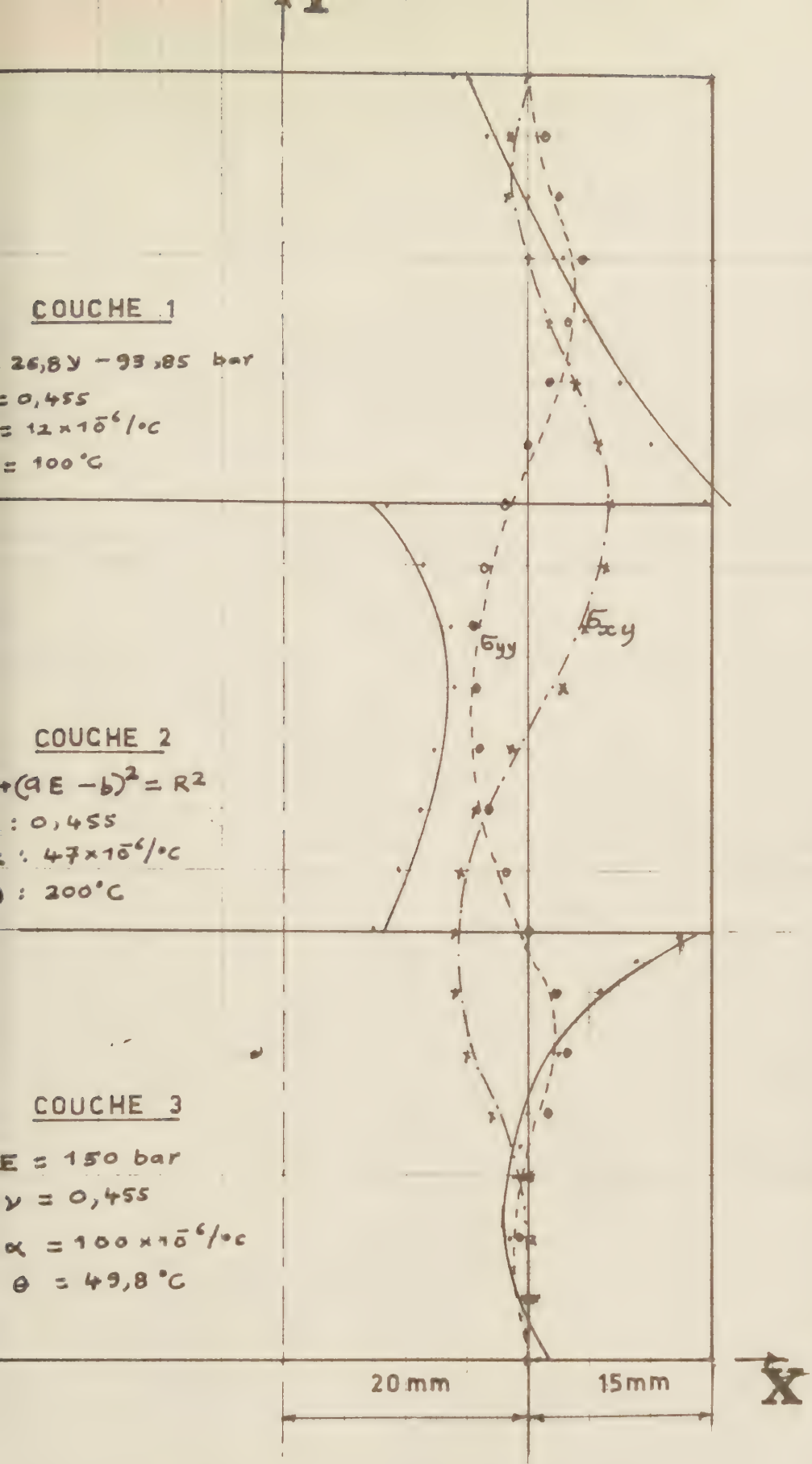


FIGURE 5.6. (iii)

REPARTITION DES CONTRAINTES σ_{xx} σ_{yy} σ_{xy} SUIVANT UNE DROITE GENERALE PERPENDICULAIRE AUX INTERFACES

	EXPERIENCE	SOLUTION NUMERIQUE
σ_{xx}	. . . . .	———
σ_{yy}	o o o o o o	- - - - - - - - - - - -
σ_{xy}	× × × × × ×	——— · ——— · ——— · ———

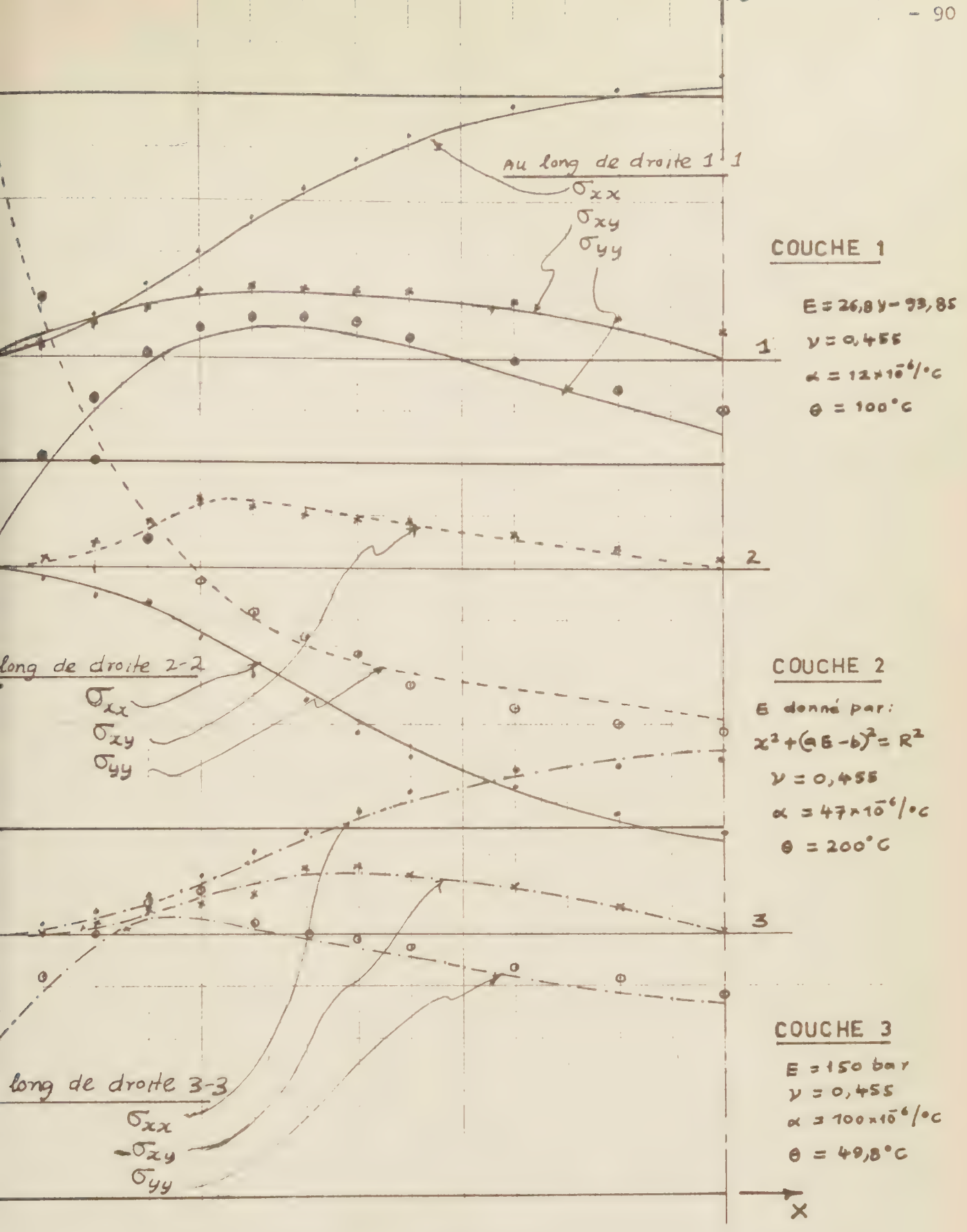


FIGURE 6.6. (iv)

REPARTITION DES CONTRAINTES σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} SUR DES DROITES GENERALES DANS CHACUNE DES COUCHES

ECHELLE 1 cm = 0,05 bar

Le module d'élasticité des plaques d'araldite D utilisée

= 150 bars.

Si $e_{th} = 0,4$, en utilisant la formule $E_{th}(x,y).e_{th} = E_{exp} \cdot e_{exp}(x,y)$ du paragraphe 2.4, on a :

$$e_{exp}(x, y) : \frac{2y - 7}{28} \qquad 1100 = x^2 + \left[0,5\ e - (33,315)^2\right]$$

6.7. Résultats théoriques et expérimentaux

Les figures 6.2. (ii) et 6.2. (iii) donnent des résultats théoriques et expérimentaux pour le milieu continu tricouche de dimensions 105 × 70 dont seul le coefficient de dilatation est homogène par morceaux.

Les figures 6.5 (iiii), 6.5 (iv) et 6.5. (v) montrent les résultats théoriques et expérimentaux pour le milieu continu tricouche dont le coefficient de dilatation thermique et le module d'élasticité sont homogènes par morceaux.

Les figures 6.6. (iii) et 6.6. (iv) donnent les résultats théoriques et expérimentaux pour le milieu continu tricouche dans lequel le module d'élasticité varie à l'intérieur d'une couche.

Page

CHAPITRE 7 - Analyse expérimentale des contraintes d'origine thermique dans les milieux monocouches isotropes plans finis à caractéristiques thermo-mécaniques sensibles à la température..... 93

7.1. Tentatives expérimentales antérieures..... 93

7.2. Méthode de résolution expérimentale du problème thermoélastique plan du milieu à sensibilité thermique..... 95

7.3. Contraintes thermiques dans un milieu plan monocouche dont le coefficient de dilatation thermique varie en fonction de la température suivant une loi exponentielle..... 98

7.4. Contraintes d'origine thermique dans un milieu plan monocouche dont le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique sont sensibles à la température..... 103

7.4.1. Réalisation expérimentale..... 103

7.5. Résultats théoriques et expérimentaux..... 108

CHAPITRE 7 - ANALYSE EXPERIMENTALE DES CONTRAINTES D'ORIGINE THERMIQUE DANS LES MILIEUX MONOCOUCHES ISOTROPES PLANS FINIS A CARACTERISTIQUES THERMO-MECANIQUES SENSIBLES A LA TEMPERATURE

Dans ce chapitre, nous aborderons l'étude expérimentale par la éthode de défigeage des contraintes d'origine thermique dans les milieux mono-ouches, dont les caractéristiques thermo-mécaniques dépendent de la température n tel milieu homogène, lors de l'action d'un champ thermique non uniforme, se ransforme en un milieu hétérogène. Les caractéristiques thermo-mécaniques rises en considération, sont le module d'élasticité et le coefficient de dila-ation thermique.

7.1. Tentatives expérimentales antérieures

En dépit de l'importance primordiale des contraintes 'origine thermique dans les milieux à sensibilité thermique en aéronautique, n aérospatiale et en genie nucléaire, qui ont été tracées brièvement dans le napitre 1, il n'existe aucune étude expérimentale, ni sur modèle réduit, ni ur modèle en grandeur réelle qui s'y rapporte. Cela peut s'expliquer de la açon suivante :

1 - Problème plan

L'utilisation des techniques photothermoélasticimétriques irectes sur modèle homothétique, exige un matériau de modèle possédant des lois e variations des caractéristiques thermo-mécaniques en fonction de la tempé-ature, semblables à celles des matériaux de prototypes. Les matériaux de odèles utilisés en photothermoélasticimétrie directe ne répondent pas à cette ondition.

Le modelage de la loi de variation thermique du module 'élasticité peut être effectué en fonction de la raideur du milieu plan à ondition que la forme explicite de la loi de répartition de température soit onnue. Cependant les lois de variations thermiques du coefficient de dilatation hermique des matériaux du modèle et du prototype, sont trop dissemblables pour ue les conditions de similitude physiques puissent être espectées.

.../...

2 - problème spatial

Il se heurte aux mêmes difficultés dues à la nature des atériaux photoélasticimétriques, que celles relatives au problème plan. La ésolution complète des contraintes rencontre les mêmes inconvénients qu'en ilieux homogènes (voir paragraphe 8.1.).

§2. Méthode de résolution expérimentale du problème thermoélastique plan du milieu à sensibilité thermique

La méthode suivante est applicable aux milieux plans doués d'un module d'élasticité (E) et d'un coefficient de dilatation thermique (α) sensibles à la température.

Donc : $E = E(\theta)$

$\alpha = \alpha(\theta)$

Le milieu est soumis à un champ thermique bidimensionnel défini explicitement par la relation $\theta = \theta(x, y)$ par rapport à un système de coordonnées cartésiennes. Soit C le contour extérieur du milieu plan qui peut être composé d'un nombre n des courbes c_1, c_2.....c_n. Soit e l'épaisseur constante du milieu plan. La simulation de la loi de variation thermique du module d'élasticité dans le modèle homothétique plan se fait par la variation de la raideur (voir 2 ci-dessous). L'effet de dilatation thermique dans le modèle est simulé au moyen des biréfringences initiales figées (voir 1 ci-dessous).

1 - Modelage de l'effet de dilatation thermique

Calculons la dilatation thermique libre ϵ

$$\epsilon = \int_0^{\theta=\theta(x,y)} \alpha(\eta)\, d\eta = \epsilon(x, y)$$

Soit ϵ_0 une valeur extrême de ϵ contenue dans C. Les biréfringences initiales à figer ($-\epsilon'$) sont données par la relation suivante (d'après le paragraphe 4.5.).

$$\epsilon' = \epsilon - \epsilon_0 = \int_0^{\theta=\theta(x,y)} \alpha(\eta)\, d\eta = \epsilon_0 = \epsilon'(x, y) \qquad 8.2.(1)$$

.../...

Comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe 4.3.1., le figeage initial des $e_{ij} = \epsilon' \delta_{ij}$ exigera la division du milieu plan en un nombre d'éléments, qui seront ultérieurement assemblés par collage afin de reconstituer le milieu plan. La compatibilité géométrique des déformations, stipule (paragraphe 4.3.4.) qu'en cas de problème plan, seules les déformations initiales (biréfringences initiales) harmoniques peuvent être figées. Une loi donnée de ϵ' peut être approchée par le choix approprié d'une suite de lois de déformations compatibles.

2 - Modelage de la loi de variation thermique du module d'élasticité

Il consiste à construire un modèle homothétique dans le plan (x, y), dont l'épaisseur $e_m(x, y)$ est déterminée en se basant sur le paragraphe

Donc :

$$e_m(x, y) = \frac{E(\theta).\ e}{E_m} = \frac{E(x, y).\ e}{E_m} \qquad 7.2.(2)$$

où : E_m = module d'élasticité du matériau de modèle à la température de défigeage

L'homothétie est entendue dans le plan du milieu qui est limité par les courbes c_1, $c_2 \ldots\ldots\ldots c_n$.

3 - Dépouillement photoélasticimétrique

Soit $(\sigma_{ij})_m$ et (σ_{ij}) se référant respectivement au champ de contraintes dans le modèle photoélasticimétrique homothétique et dans le milieu plan à caractéristiques thermo-mécaniques sensibles à la température étudiée. D'après le paragraphe 2.4. . Si $E_m\ e_m(x, y) = E(\theta).\ e$, aux points homologues des deux modèles, la température étant exprimée explicitement en fonction des coordonnées spatiales, on a :

$$(\sigma_{ij}) = \frac{(\sigma_{ij})_m \cdot e_m(x, y)}{e}$$

.../...

L'observation photoélasticimétrique du modèle plan en ncidence normale de telle manière que la distance parcourue par le faisceau ncident soit égale à l'épaisseur, $e_m(x, y)$ du modèle plan donnera la relation uivante :

$$(\sigma_{ij})_m = \frac{n\,(x, y) \cdot s}{e_m\,(x, y)}$$

où : s = constante photoélasticimétrique
n (x, y) = ordre de franges

Une pareille observation se fera par immersion du modèle lan dans un liquide de même indice, contenu dans un récipient à parois trans- arentes, perpendiculaires au faisceau incident.

En reportant cette valeur de $(\sigma_{ij})_m$ dans la relation n a la relation suivante :

$$(\sigma_{ij}) = \frac{n\,(x, y) \cdot s}{e}$$

avec e = épaisseur constante du milieu plan.

ans laquelle l'épaisseur variable du modèle ne figure pas.

7.3. Contraintes thermiques dans un milieu plan monocouche dont le coefficient de dilatation thermique varie en fonction de la température suivant une loi exponentiell

Nous considérons un milieu monocouche plan de dimensions 100 x 105 mm, dont la loi de variation du coefficient de dilatation thermique en fonction de la température est donnée par la relation suivante :

$$\alpha = \alpha_0 \, e^{\theta/\theta_0}$$

où : α_0, θ_0 sont des constantes

Il est soumis à un champ thermique de la forme suivante

$$\theta = \theta_0 \log_e \left[e - (e - 1) \operatorname{erf}. \left(\frac{y}{a}\right)\right]$$

où : e = 2,718

$$\operatorname{erf}\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/a} e^{-p^2} dp$$

et a = const. = 1,37

Le module d'élasticité et le coefficient de Poisson sont indépendants de la température et sont égaux respectivement à 200 bars et 0,5.

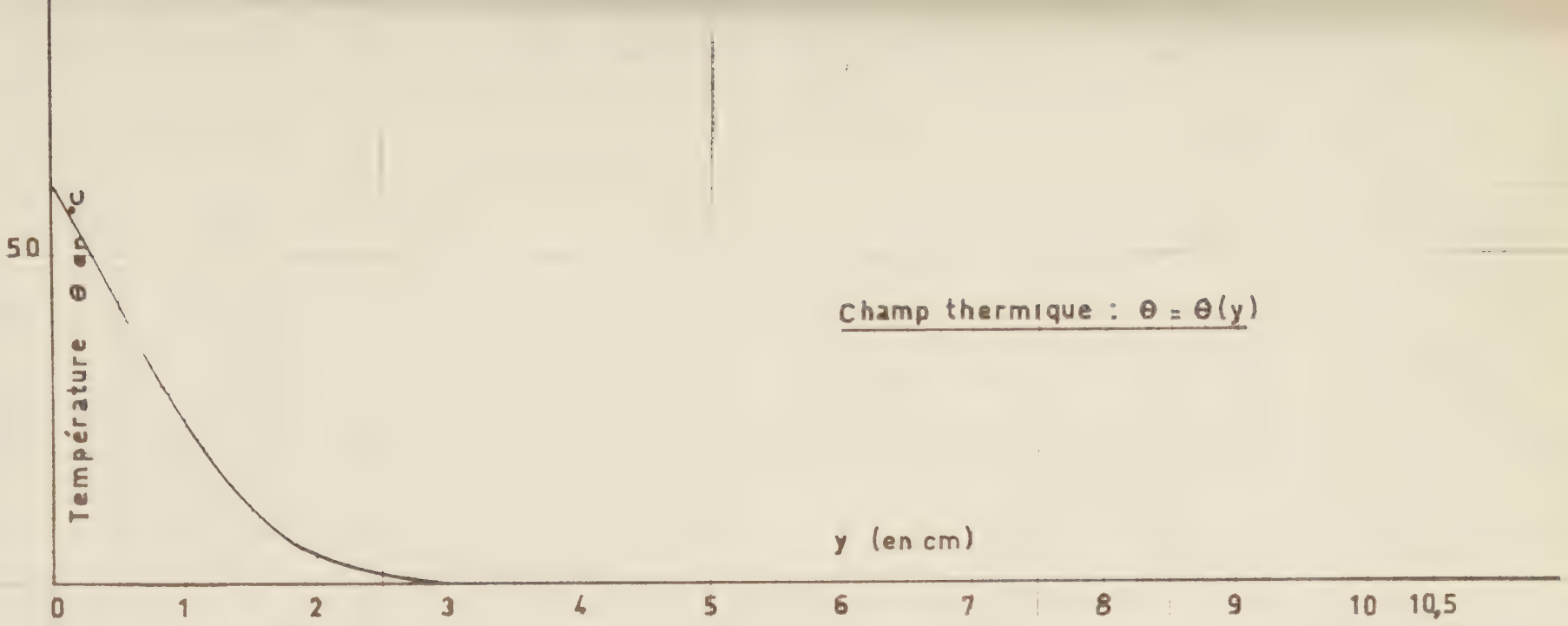
7.3.1. Réalisation expérimentale

Calculons la dilatation thermique libre , elle est égale à :

$$\epsilon = \epsilon(y) = \int_0^{\theta = \theta(y)} \alpha(\eta) \, d\eta$$

$$= \alpha_0 \, \theta_0 \, (e - 1) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{a}\right)\right] \qquad 7.3.1. \ (1)$$

.../...



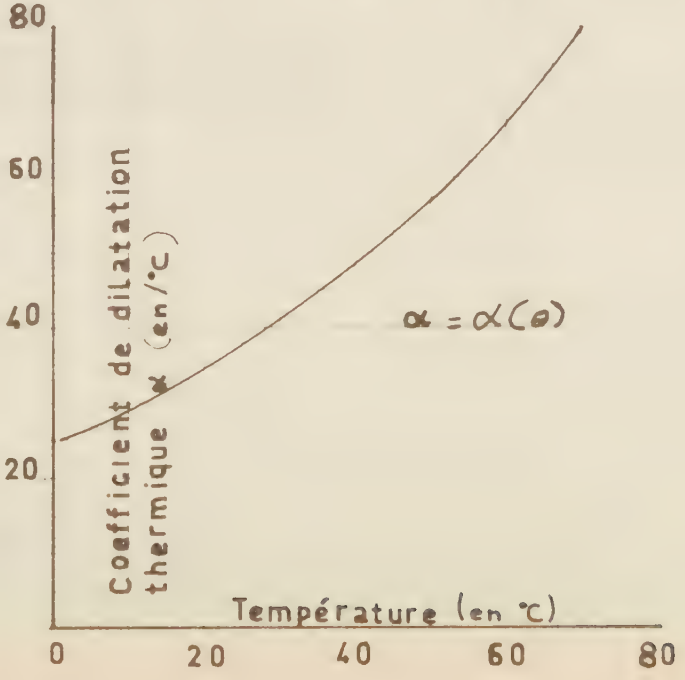
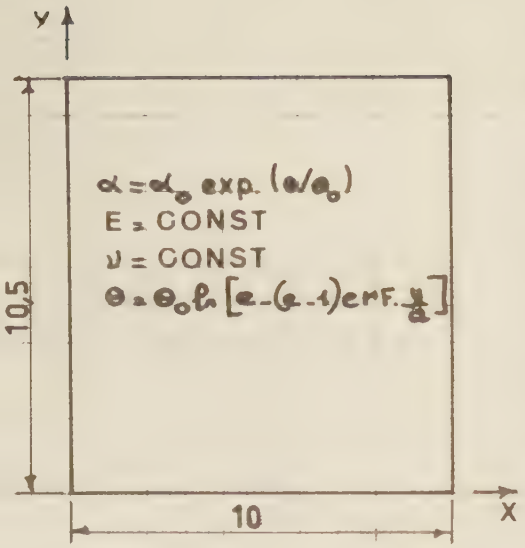
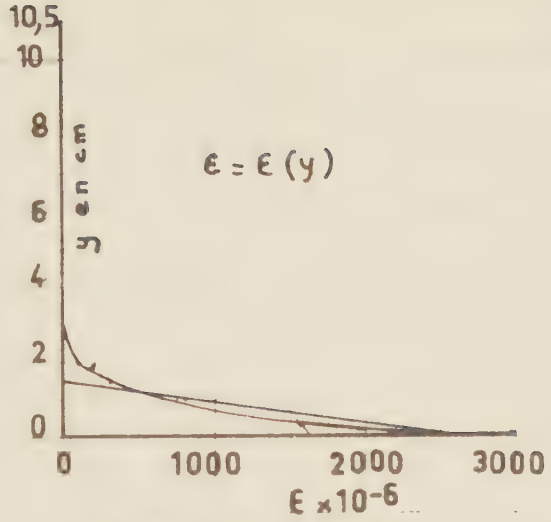


FIGURE 7.3.(1)

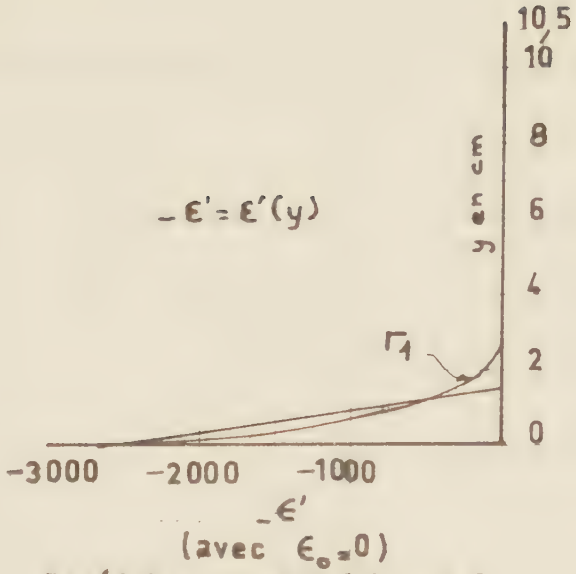
CHAMP THERMIQUE ET DEPENDANCE THERMIQUE DU COEFFICIENT DE DILATATION THERMIQUE



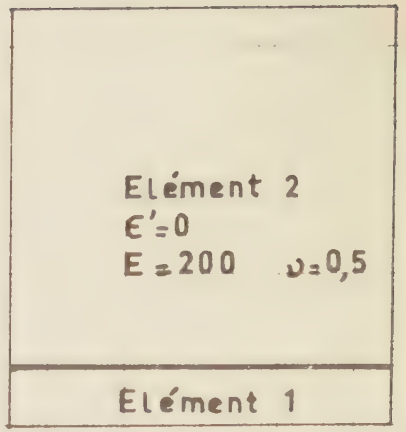
Caractéristiques du milieu monocouche à sensibilité thermique



Déformation thermique libre en fonction de y

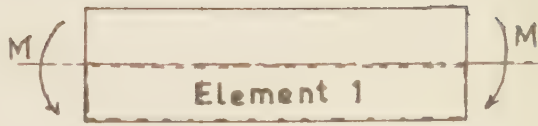


Biréfringences initiales à figer en fonction de y



CHOIX DES ELEMENTS

$\alpha_0 = 25 \times 10^{-6}/°C$
$\theta_0 = 60°C$
E = 200 bars
e = 2,718
a = 1,37



Origine de l'élément 1

FIGURE 7.3.1.(i)

SCHEMA INDIQUANT LES DIFFERENTES PHASES DU PROCEDE DE DEFIGEAGE

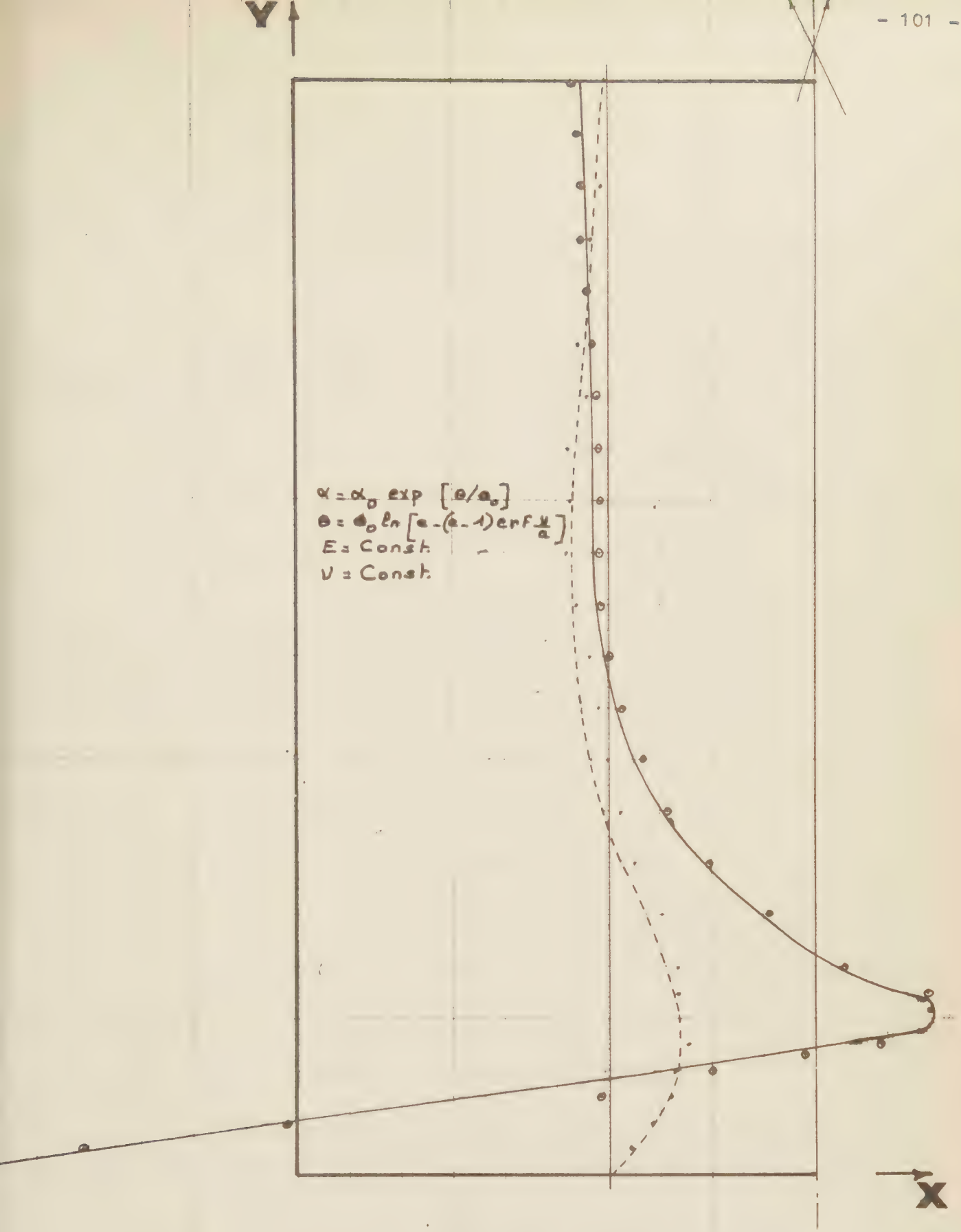


FIGURE 7.3.(ii)

REPARTITION DES CONTRAINTES σ_{xx} σ_{xy}
SUR UNE SECTION GENERALE

	EXPERIENCE	SOLUTION NUMERIQUE
σ_{xx}	ooo	———
σ_{xy}	. . .	- - - - -

ECHELLE 1 CM = 0,1 bar

La figure montre la courbe $\epsilon(y)$ donnée par la relation §3.1. (1) avec : $\alpha_o = 25 \times 10^{-6}$ /°C

$\theta_o = 60°C$

$a = 1,37$

Choisissant ϵ_o égale à zéro, le champ de déformation initiale à figer, est donné par la relation suivante (voir paragraphe 7.2.(1)).

$$-\epsilon' = -\alpha_o \theta_o (e - 1) \left[1 - \text{erf}\left(\frac{y}{a}\right)\right]$$

Choix des éléments

On approchera la partie Γ_1 de la courbe $-\epsilon(y)$ par une droite, ce qui nous indique intuitivement de diviser le milieu en deux éléments. Le premier élément ne contient pas de déformations initiales figées. Le champ linéaire de déformations dans le deuxième élément s'obtient par la flexion circulaire d'une poutrelle sous l'effet d'un moment constant M donné par la relation suivante :

$$M = \frac{b\ h\ E}{3}$$

où : b = largeur de la poutrelle
h = demi-hauteur de la poutrelle, laquelle est égale aussi à la hauteur de l'élément 1.
E = module d'élasticité du matériau à la température de figeage

Modelage du module d'élasticité

Puisque le module d'élasticité du milieu est insensible à la température, les épaisseurs des deux éléments sont égales.

Les deux éléments sont assemblés par collage et le modèle composite est soumis au cycle de défigeage qui entrainera la redistribution des contraintes figées.

.../...

7.4. Contraintes d'origine thermique dans un milieu plan monocouche dont le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique sont sensibles à la température

Nous considérons un milieu plan de dimensions 100 x 105 mm dont le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique suivent des lois hyperboliques en fonction de la température, à savoir :

$$\alpha = \alpha_o \, ch \left(\frac{\theta}{\theta_o}\right) \qquad 7.4.(1)$$

$$E(\theta) = a + b \, th^{-1} \left[1 - \frac{sh \left(\frac{\theta}{\theta_o}\right)}{sh \, 1}\right] \qquad 7.4.(2)$$

Il est soumis à un champ thermique frigorifique décrit par la relation suivante :

$$\theta = \theta_o \, sh^{-1} \left[sh \, 1 \, (1 - th \, cy)\right] \qquad 7.4.(3)$$

avec : $\alpha_o = 10 \times 10^{-6}/°C$ (valeur moyenne pour les bétons)
$\theta_o = - 225°C$
$a = 375$ bars
$b = 66,67$ bars
$c = 0,75$

7.4.1. Réalisation expérimentale

La dilatation thermique libre est donnée par l'intégrale suivante :

$$\epsilon(y) = \int_0^{\theta(y)} \alpha(\eta) \, d\eta$$

$$\epsilon(y) = \alpha_o \, \theta_o \, sh \, 1 \left[1 - th(0,75 \, y)\right] \qquad 7.4.1.(1)$$

.../...

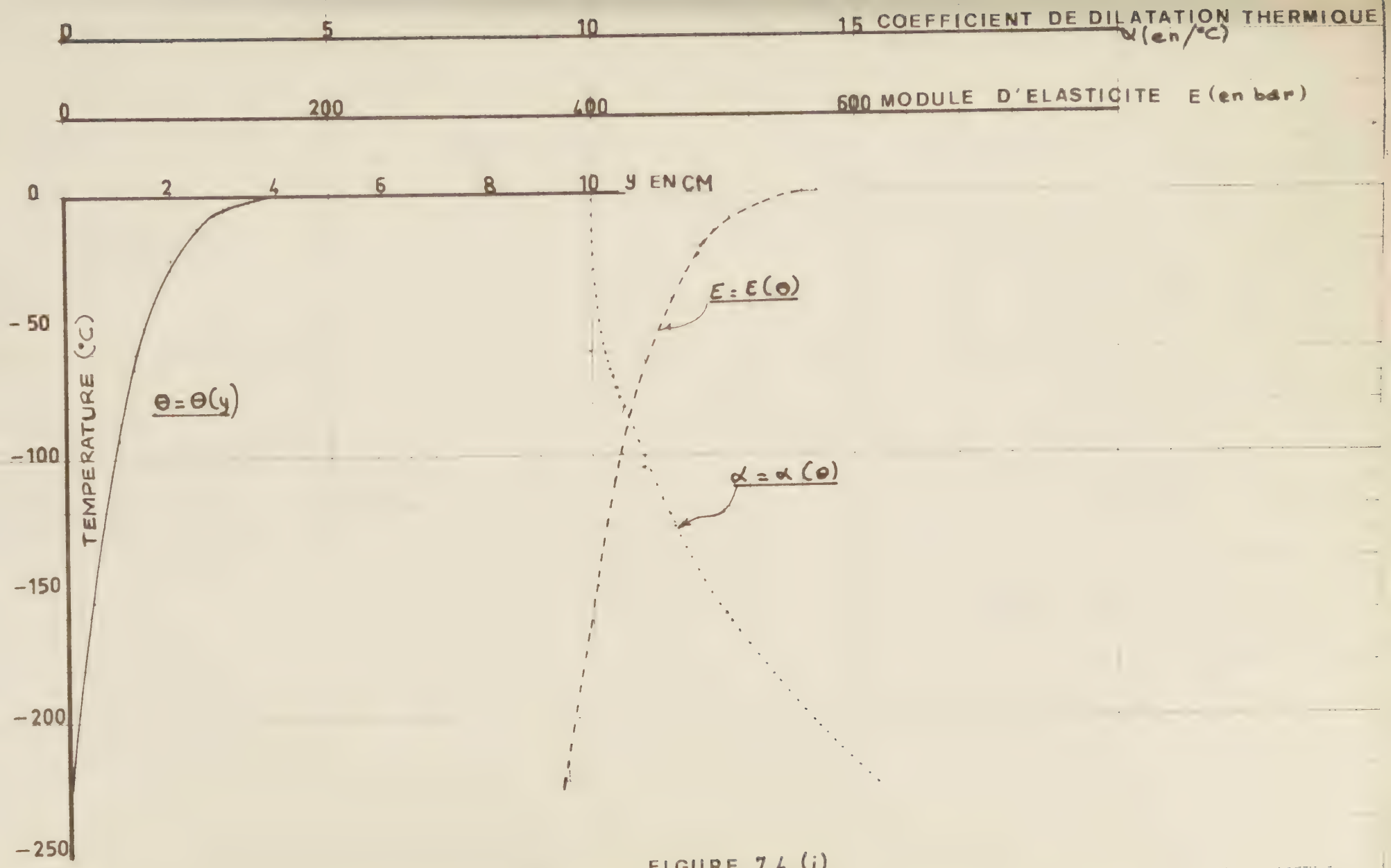
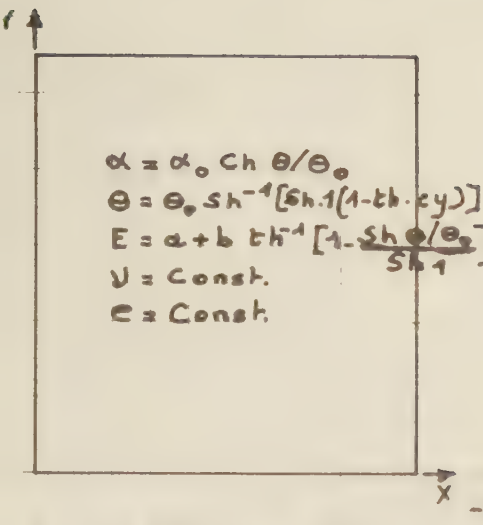


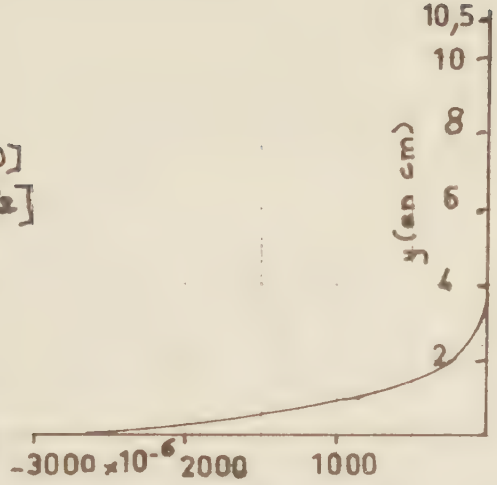
FIGURE 7.4.(i)

CHAMP THERMIQUE ET DEPENDANCE THERMIQUE DU MODULE D'ELASTICITE ET DU COEFFICIENT DE DILATATION THERMIQUE

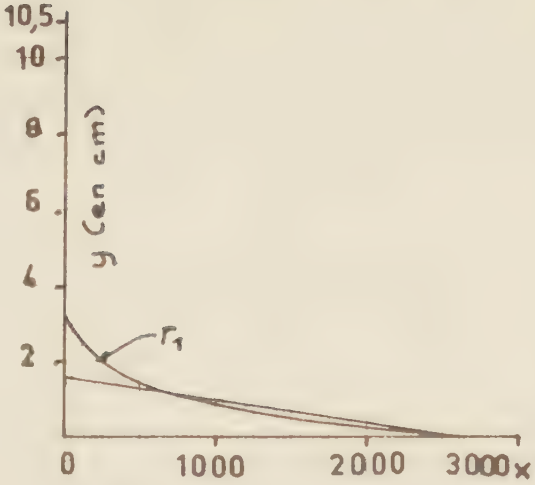


Caractéristiques du milieu monocouche à sensibilité thermique

$\alpha_0 = 10 \times 10^{-6}/°C$
$\theta_0 = -225°C$
a = 375 bars
b = 66,67 bars
c = 0,75

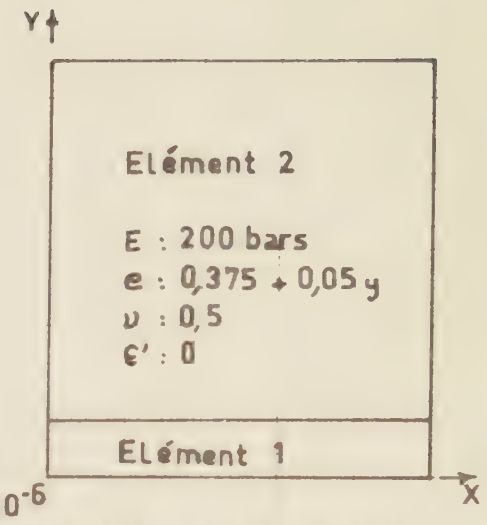


$\epsilon = \int_0^{\eta} \alpha(y)\, d\eta$



avec $\epsilon' = \epsilon - \epsilon_0$ et $\epsilon_0 = 0$

Biréfringences initiales figées



Modèle expérimental

Elément 1 obtenu par la flexion pure

$-\epsilon' = 2650 \times 10^{-6}\left(1 - \frac{2y}{3}\right)$

e = 0,375 + 0,05 y cm
ν = 0,5
E = 200 bars

FIGURE 7.4.1.(i)

SCHEMA INDIQUANT LES DIFFERENTES PHASES DE DEFIGEAGE

$\chi = \alpha_0 \, ch(\theta/\theta_0)$

$E = a + b \, th^{-1}\left(1 - \frac{sh\,\theta/\theta_0}{sh\,1}\right)$

$\theta = \theta_0 \, sh^{-1}\left[sh\,1\,(1 - th\,cy)\right]$

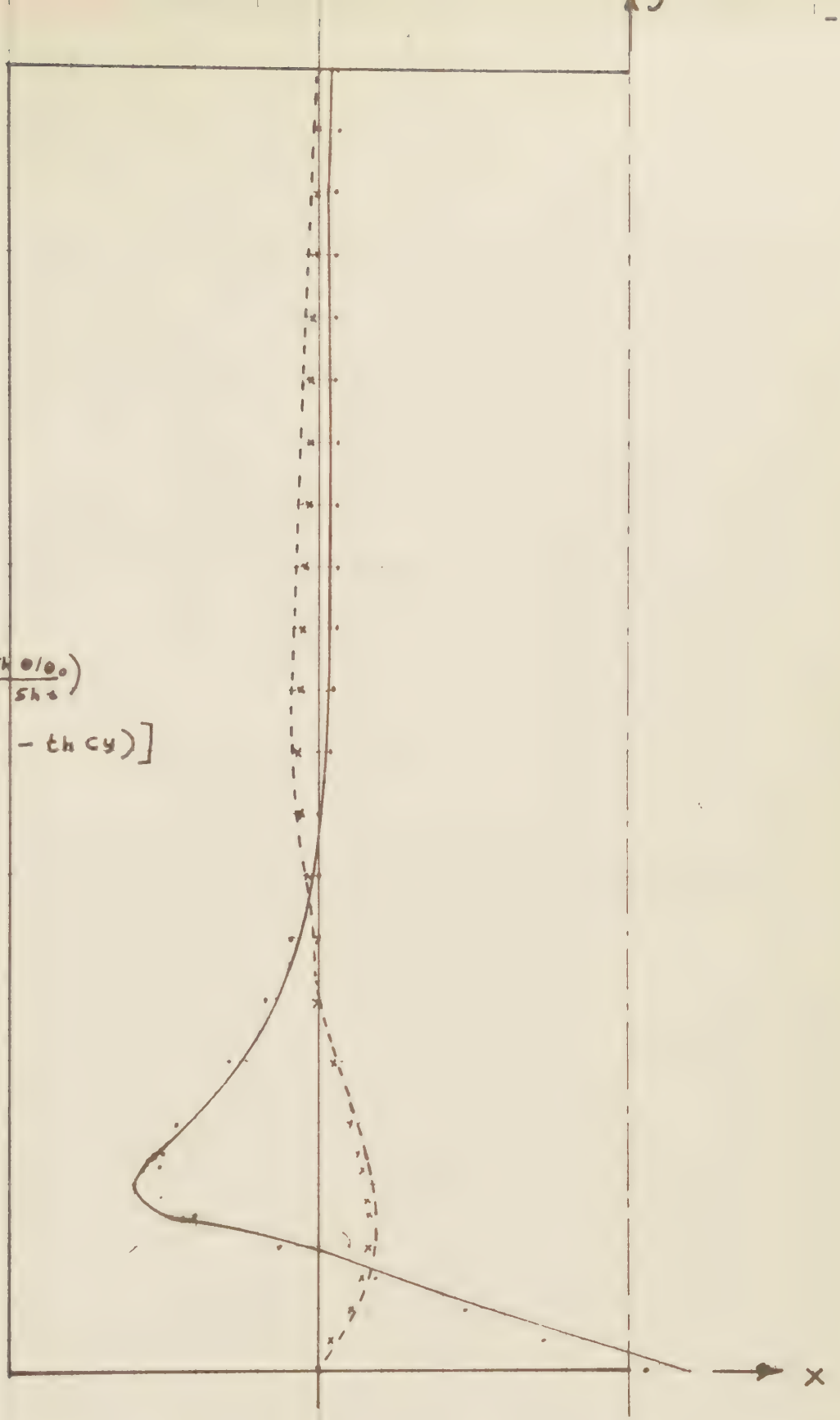


FIGURE 7.4. (11)

REPARTITION DES CONTRAINTES SUIVANT UNE DROITE GENERALE PERPENDICULAIRE AUX INTERFACES

EXPERIENCE SOLUTION NUMERIQUE

σ_{xx} . . . . . ——————

σ_{xy} x x x x x x ——— ——— ———

ECHELLE 1 cm = 0,1 bar

La figure 7.4.1(i) montre le tracé de la courbe $\epsilon' = \epsilon'(y)$ d'après la relation 7.4.1.(1). En choisissant $\epsilon_o = 0$, on aboutira à un modèle composite à deux éléments. La partie Γ_1 de la courbe $-\epsilon' = \epsilon'(y)$, est approchée par une droite et la répartition linéaire de déformation correspondante, s'obtient par la flexion circulaire d'une poutrelle comme dans le paragraphe 7.3.1.

La variation de la raideur du modèle photoélasticimétrique pour correspondre à la sensibilité thermique du module d'élasticité s'obtient par la relation 7.2.(2).

$$e_m(y) = \frac{a + b\ th^{-1}\left[1 - \frac{Sh.(\theta/\theta_o)}{Sh.1}\right] \times e_{th}}{E_m}$$

Avec : $E_m = 200$ bars

$e_{th} = 0{,}2$ cm

et en utilisant la relation 7.4.(3), on a :

$$e_m(y) = {,}375 + {,}050\ y \qquad 7.4.(4)$$

Les deux éléments dans lesquels les biréfringences initiales ont été figées, sont usinés au profil donné par la relation 7.4.(4) Ils sont assemblés et soumis au défigeage comme avant.

7.5. Résultats théoriques et expérimentaux

La figure 7.3. (ii) indique les résultats théoriques et expérimentaux pour le milieu monocouche à coefficient de dilatation thermique sensible à la température.

La figure 7.4. (i) donne les résultats théoriques et expérimentaux pour le milieu monocouche à module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique sensibles à la température.

Page

CHAPITRE 8 - Analyse expérimentale des contraintes d'origine thermique dans les milieux continus tridimensionnels stratifiés finis..... 109

8.1. Photothermoélasticimétrie directe tridimensionnelle..... 109

8.1.1. Méthode du polariscope encastré..... 109

8.1.2. Méthode de la lumière diffusée..... 110

8.1.3. Conclusions partielles..... 111

8.2. Contraintes d'origine thermique dans un bloc parallélépipédique tricouche lors d'une variation uniforme de la température..... 112

8.2.1. Réalisation expérimentale..... 112

8.2.2. Résolution des contraintes agissant sur le plan de symétrie..... 115

8.2.3. Résolution des contraintes agissant sur un plan général perpendiculaire au plan d'interface..... 115

8.3. Contraintes d'origine thermique dans un corps cylindrique long bicouche lors d'une variation uniforme de la température..... 120

8.3.1. Réalisation expérimentale..... 120

8.4. Résultats théoriques et expérimentaux..... 127

CHAPITRE 8 - ANALYSE EXPERIMENTALE DES CONTRAINTES D'ORIGINE THERMIQUE DANS LES MILIEUX CONTINUS TRIDIMENSIONNELS STRATIFIES FINIS

8.1. Photothermoélasticimétrie directe tridimensionnelle

La photothermoélasticimétrie directe tridimensionnelle se caractérise par la présence réelle du champ thermique qui provoque un régime de contraintes dans le modèle photoélasticimétrique. Une ou plusieurs combinaisons des modes de transfert de chaleur tels que la conduction ou la convection crée et maintient le champ thermique. Comme en photoélasticimétrie tridimensionnelle, on distinguera deux méthodes d'observations photoélasticimétriques qui diffèrent suivant l'isolation de la région d'intérêt dans le modèle :

- Méthode du polariscope encastré et méthode de la lumière diffusée.

8.1.1. Méthode du polariscope encastré

C'est essentiellement la méthode de Favre ou de couche sensible. Elle a subi les changements exigés par la présence du champ thermique. Le modèle composite de Favre contenant une couche biréfringente entourée d'une couche insensible réagit en tant que corps homogène aux sollicitations mécaniques Mais lorsque ce modèle composite est soumis au champ thermique, l'inharmonie des modules d'élasticité, des coefficients de dilatation thermique, de conductibilité et diffusivité thermique des couches sensible et insensible, réapparait Cela est dû au fait que les lois de variations de ces caractéristiques physiques ne sont pas les mêmes pour les deux matériaux. Dans ces conditions le modèle homogène se transformera en modèle hétérogène élastique et thermique.

.../...

On surmonte cet inconvénient en utilisant un modèle entièrement homogène en matière photoélasticimétrique dans lequel une région d'intérêt à petite épaisseur est enfermée entre deux feuilles de polaroïds à lumière polarisée circulairement. La présence des polaroïds ne semble pas perturber ni l'homogénéité mécanique et thermique ni la continuité de la matière du modèle. L'impossibilité d'obtenir les directions des contraintes principales secondaires empêche de résoudre le problème général de contraintes tridimensionnelles figurant les six composantes de contraintes. Même un cas général de symétrie axiale où la composante de cisaillement σ ne s'annulle pas, ne peut être abordé complètement par cette méthode. Lorsque les composantes de cisaillement s'annullent, la séparation intégrale des trois composantes de contraintes, s'effectue par l'intégration des équations d'équilibre en partant d'un bord sur lequel les contraintes sont connues.

Un cas de symétrie axiale que provoque le régime thermique stationnaire d'un cylindre épais creux, dont les parois extérieure et intérieure sont maintenues à des températures constantes, a été abordé [19] . L'annulation de la composante de cisaillement σ_r permet de procéder à la séparation complète des trois composantes de contraintes.

8.1.2. Méthode de la lumière diffusée

La méthode de la lumière diffusée permet d'aborder un cas général de contraintes thermiques tridimensionnel dans lequel figurent les six composantes de contraintes. Elle donne les valeurs de $\sigma_{11} - \sigma_{22}$, $\sigma_{22} - \sigma_{33}$, $\sigma_{33} - \sigma_{11}$, σ_{12}, σ_{23}, σ_{31} de la manière suivante :

L'observation de la lumière diffusée sur le plan $x_1\ x_3$ d'un faisceau de lumière dirigé parallèle à l'axe x_2, permet d'obtenir la différence des contraintes principales secondaires $p' - q'$ dans le plan $x_1\ x_3$ et leurs directions. Si ϕ' est l'orientation de la composante p' par rapport à l'axe des x_3, on a :

$$\sigma_{13} = \frac{p' - q'}{2} \sin 2\phi'$$

et $\sigma_{33} - \sigma_{11} = (p' - q') \cos 2\phi'$

.../...

De la même manière, l'observation de la lumière diffusée respectivement sur les plans x_2 x_3 et x_1 x_2 des faisceaux lumineux dirigés suivant les axes des x_1 et des x_3 donnera les valeurs respectives des cisaillements et des différences des contraintes normales.

La séparation des contraintes se fera par l'intégration des équations d'équilibre par la méthode des différences de cisaillement généralisée au cas spatial [17].

8.1.3. Conclusions partielles

La photothermoélasticimétrie tridimensionnelle par la lumière diffusée permet donc de résoudre le problème général des contraintes spatiales. Outre les mérites provenant des valeurs importantes des caractéristiques physiques du matériau biréfringent en état vitreux, comme en photothermoélasticimétrie bidimensionnelle, elle possède la qualité d'être non-destructive

Mais le problème technologique posé pour la fabrication d'un modèle hétérogène rend difficile son application au milieu stratifié.

8.2. Contraintes d'origine thermique dans un bloc parallélépipédique tricouche lors d'une variation uniforme de la température

Le bloc parallélépipédique tricouche a pour dimensions 50 x 50 x 67,5, chaque couche tridimensionnel ayant 22,5 de hauteur. Le module d'élasticité et le coefficient de Poisson sont constants pour les 3 couches. Le coefficient de dilatation thermique et le gradient de la température, varient d'une couche à l'autre, mais sont constants à l'intérieur de la même couche.

8.2.1. Réalisation expérimentale

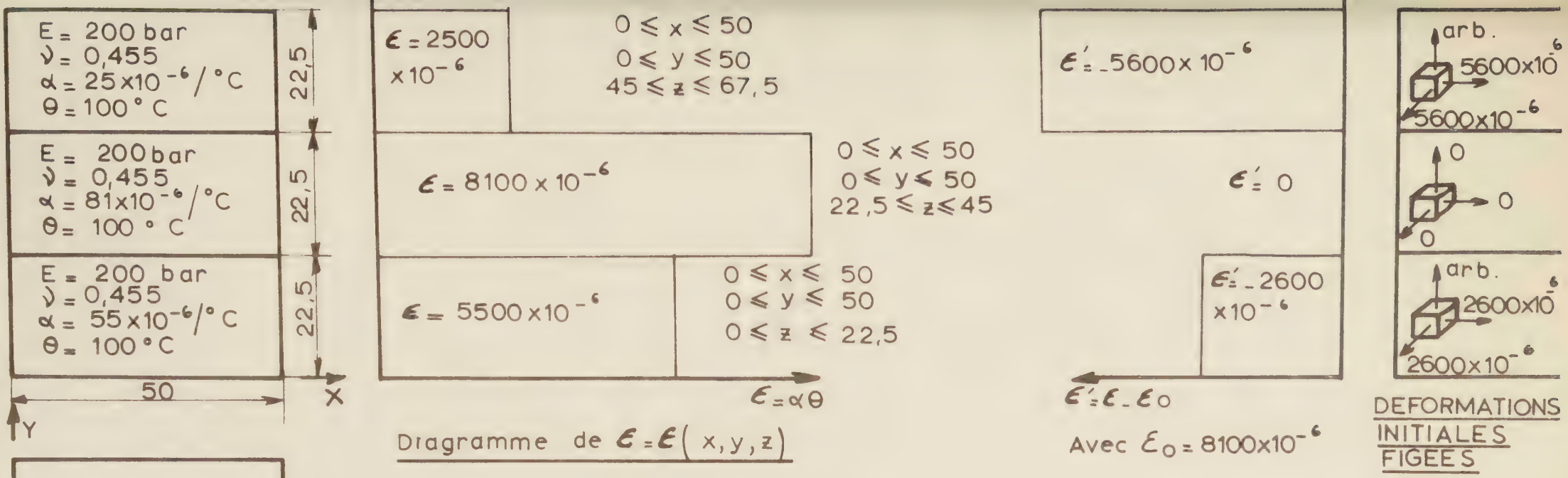
On se base sur la méthode particulière de défigeage applicable aux milieux stratifiés à surfaces interfaciales parallèles. La figure montre les biréfringences figées initialement dans les trois couches. Elles sont :

$$(\varepsilon_{ij})_r = -\frac{1}{\nu} (\alpha_2 \theta_2 - \alpha_r \theta_r) \delta_{ij}$$

où l'indice r = 1, 2, 3 repère la couche correspondante Cette biréfringence est obtenue par compression simple d'un prisme long avec une compression égale à $-\frac{E}{\nu} (\alpha_2 \theta_2 - \alpha_r \theta_r)$ où E, ν sont respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson à la température de figeage. Les différentes couches sont usinées aux dimensions de 50 x 50 x 22,5 et collées pour former le modèle composite qui lors du défigeage subira des contraintes thermiques voulues.

Nous examinons les contraintes sur deux plans, tous deux perpendiculaires au plan d'interface. La séparation intégrale des composantes sur ces plans est faite (voir figure 8.2.1. (I)

..../...



VUE A

Diagramme de $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$

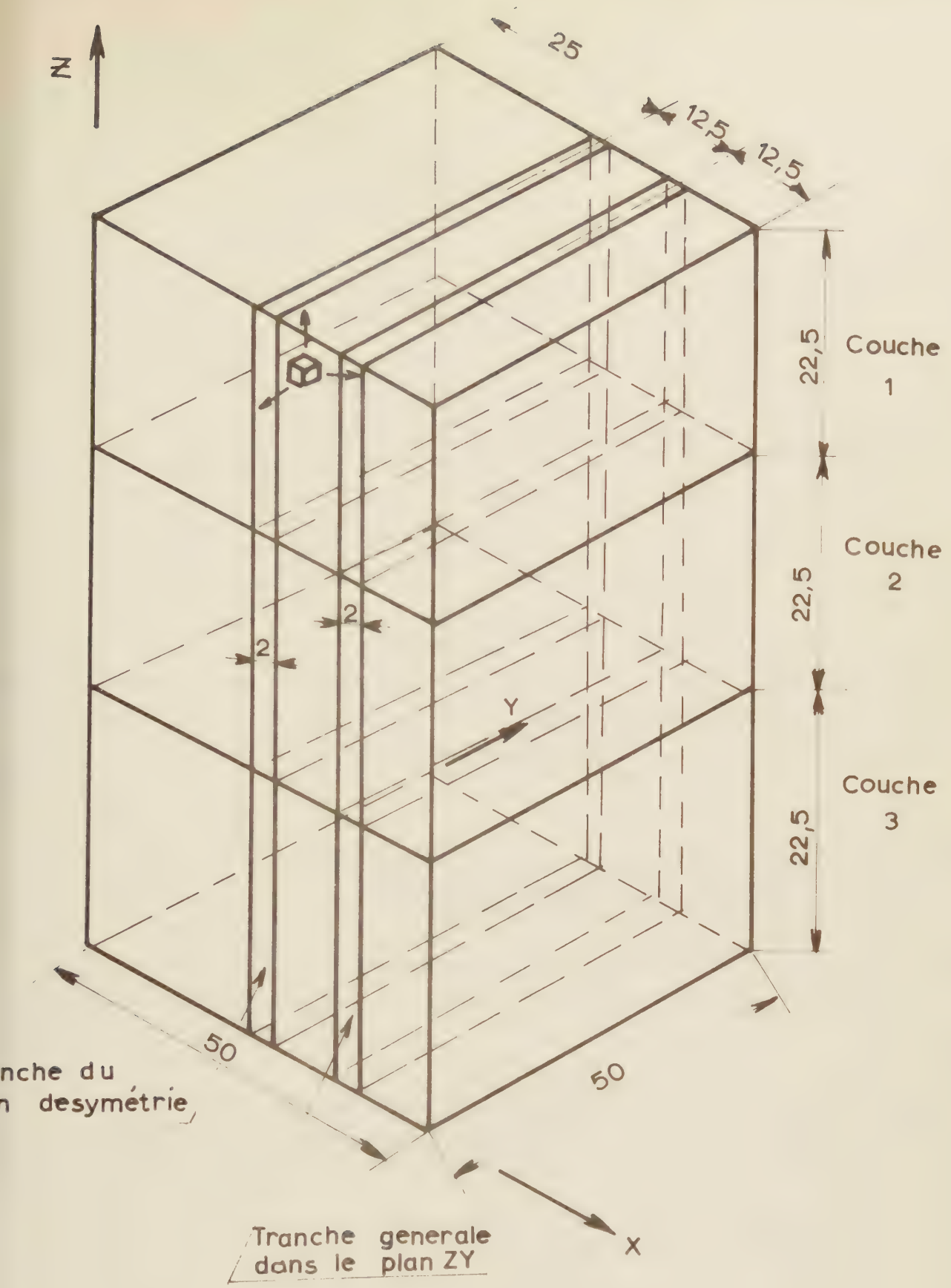
Avec $\varepsilon_0 = 8100 \times 10^{-6}$

DEFORMATIONS INITIALES FIGEES

CARACTERISTIQUES DU BLOC PARALLELIPIPEDIQUE TRICOUCHE.

SCHEMA INDIQUANT DES DIFFERENTES PHASES DU PROCEDE DU DEFIGEAGE

FIGURE 8_2 (i)



VUE DES TRANCHES DU BLOC PARALLELEPIPEDIQUE TRICOUCHE.

FIGURE 8·2(ii)

8.2.2. Résolution des contraintes agissant sur le plan de symétrie

En vertu de la symétrie, les composantes des contraintes e cisaillement agissant sur le plan de symétrie s'annullent, à savoir :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{y} = 0$$

En outre, sur le plan de symétrie $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$. Donc 'équation d'équilibre s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

Ainsi l'observation d'une tranche contenant le plan ymétrie en incidence normale peut s'effectuer afin que la séparation des ontraintes soit faite. L'extrapolation des composantes de contraintes σ_{xx}, σ_{yy}; σ_{xz} , se fera donc de la même manière que dans le problème plan (voir .4.).

8.2.3. Résolution des contraintes agissant sur un plan général perpendiculaire au plan d'interface

Ce plan présente un cas général des contraintes tridi-ensionnelles où figurent les six composantes de contraintes, à savoir :

σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} , σ_{xy}, σ_{yz} , σ_{zx}

On procédera à la résolution complète des composantes de ontraintes suivant une ligne AA' se trouvant près de l'interface, de la anière suivante

Considérons l'équation d'équilibre suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial z} = 0$$

..../...

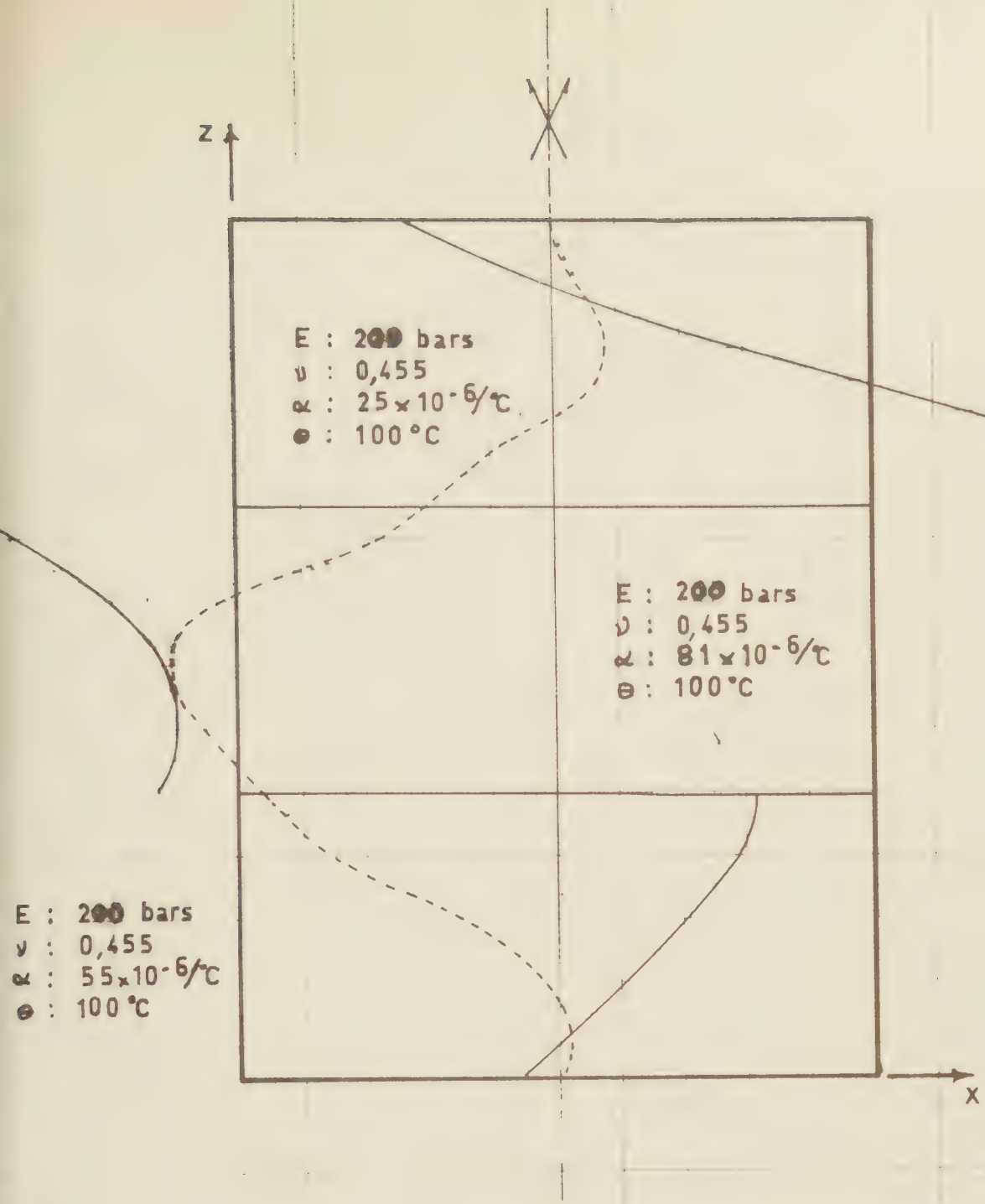


FIGURE 8.2.2. (i)

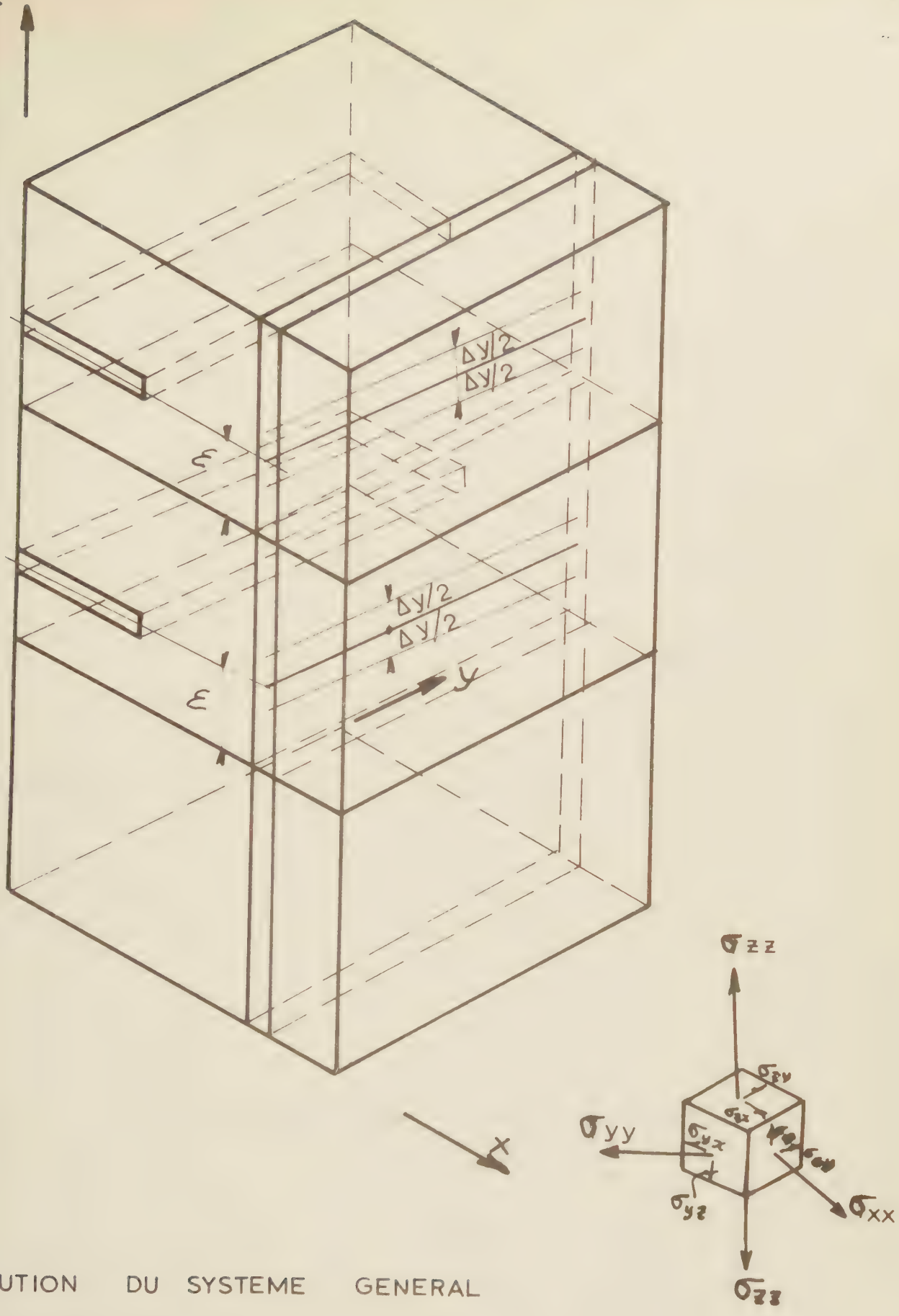
REPARTITION DES CONTRAINTES σ_{xx}, σ_{yy} et σ_{zz}

SUR L'AXE DE SYMETRIE

ECHELLE 1 CM = 0,1 BAR

σ_{xx}, σ_{yy} ——————

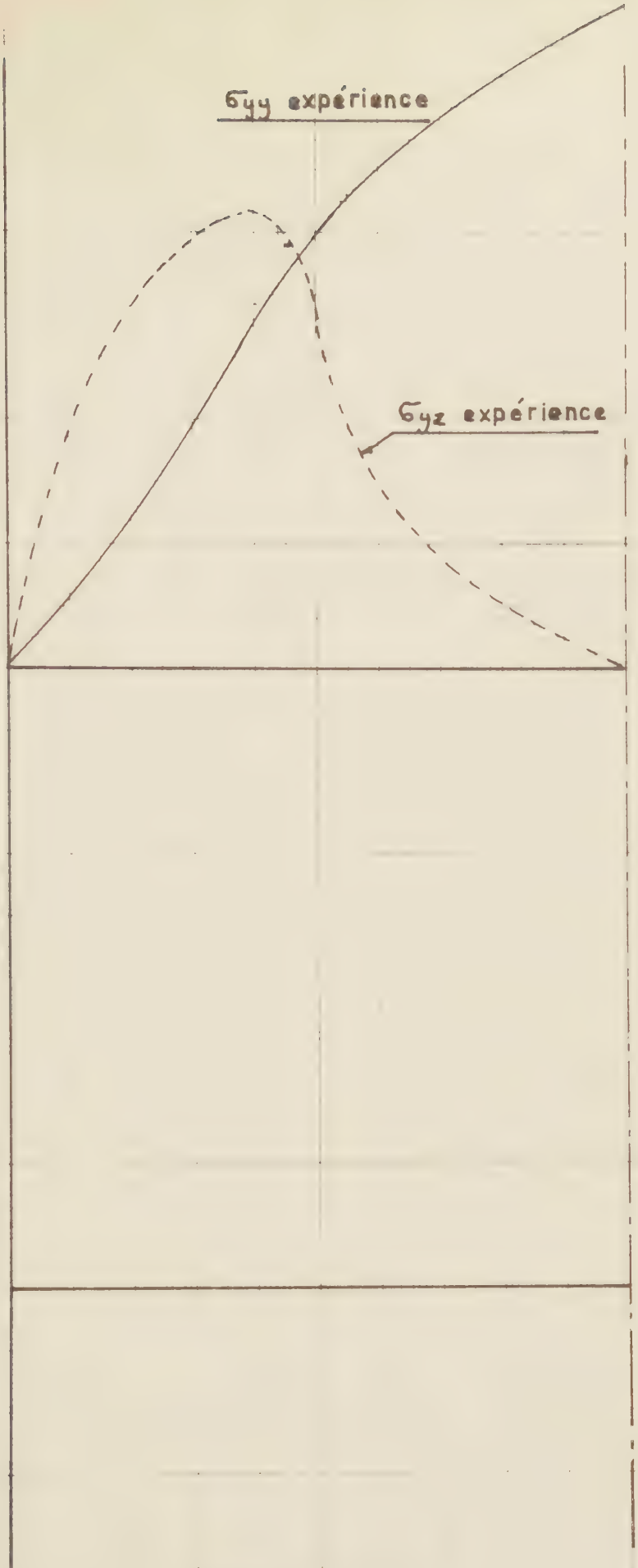
σ_{zz} - - - - - - - -



OLUTION DU SYSTEME GENERAL

CONTRAINTES TRIDIMENSIONNELLES

FIGURE 8-2-3 (i)



COUCHE 1

E : 200 bar
ν : 0,455
α : 25×10^{-6}/°C
θ : 100°C

COUCHE 2

E : 200 bar
ν : 0,455
α : 81×10^{-6}/°C
θ : 100°C

COUCHE 3

E : 200 bar
α : 55×10^{-6}/°C
ν : 0,455
θ : 100°C

FIGURE 8.2.3.0i)

REPARTITION DES CONTRAINTES PRES DE L'INTERFACE SUR UN PLAN GENERAL PERPENDICULAIRE AUX INTERFACES

ECHELLE 1 CM = 0,02 bar

L'intégration par rapport à x et le remplacement de l'intégrale et des dérivées partielles respectivement par une somme et des différences finies, conduit à :

$$(\sigma_{xx})_{x=x} = (\sigma_{xx})_{x=0} - \sum_{x=0}^{x=x} \frac{\Delta \sigma_{xz}}{\Delta z} \cdot \Delta x - \sum_{x=0}^{x=x} \frac{\Delta \sigma_{xy}}{\Delta y} \cdot \Delta x .$$

Les deux composantes de cisaillement σ_{xz} et σ_{xy} sont obtenues par l'observation respectivement des tranches se trouvant dans le plan x z et xy. En vertu de la symétrie des contraintes, on obtiendra la tranche parallèle au plan xy du côté opposé du bloc parallélépipédique, comme le montre la figure. Les composantes σ_{yy} et σ_{zz} s'obtiennent à l'aide du cercle de Mohr, et la composante de cisaillement σ_{yz} par l'observation en incidence oblique de la tranche parallèle au plan x z. [17]

8.3. Contraintes d'origine thermique dans un corps cylindrique long bicouche lors d'une variation uniforme de la température

Le corps cylindrique long bicouche se compose d'un noyau de diamètre 40 mm, et d'une couronne de diamètre intérieur 40 mm, et diamètre extérieur 70 mm. Le noyau et la couronne ont la même valeur de module d'élasticité et de coefficient de Poisson, et diffèrent en ce qui concerne le coefficient de dilatation thermique. Le dernier étant constant à l'intérieur de la même couche. Il est soumis à une variation uniforme de température.

8.3.1. Réalisation expérimentale

La figure montre les biréfringences qui doivent être figées initialement. Du fait que la surface cylindrique du corps bicouche est libre, des déformations initiales égales à $e_{\theta\theta} = e_{zz} = \alpha_2\theta_2 - \alpha_1\theta_1$ doivent être figées seules à la surface de contact. Par conséquent, le noyau ne contiendra aucune biréfringence initiale et la couronne sera figée sous une déformation initiale égale à $e_{\theta\theta} = e_{zz} = \alpha_2\theta_2 - \alpha_1\theta_1$ au droit de sa surface interne.

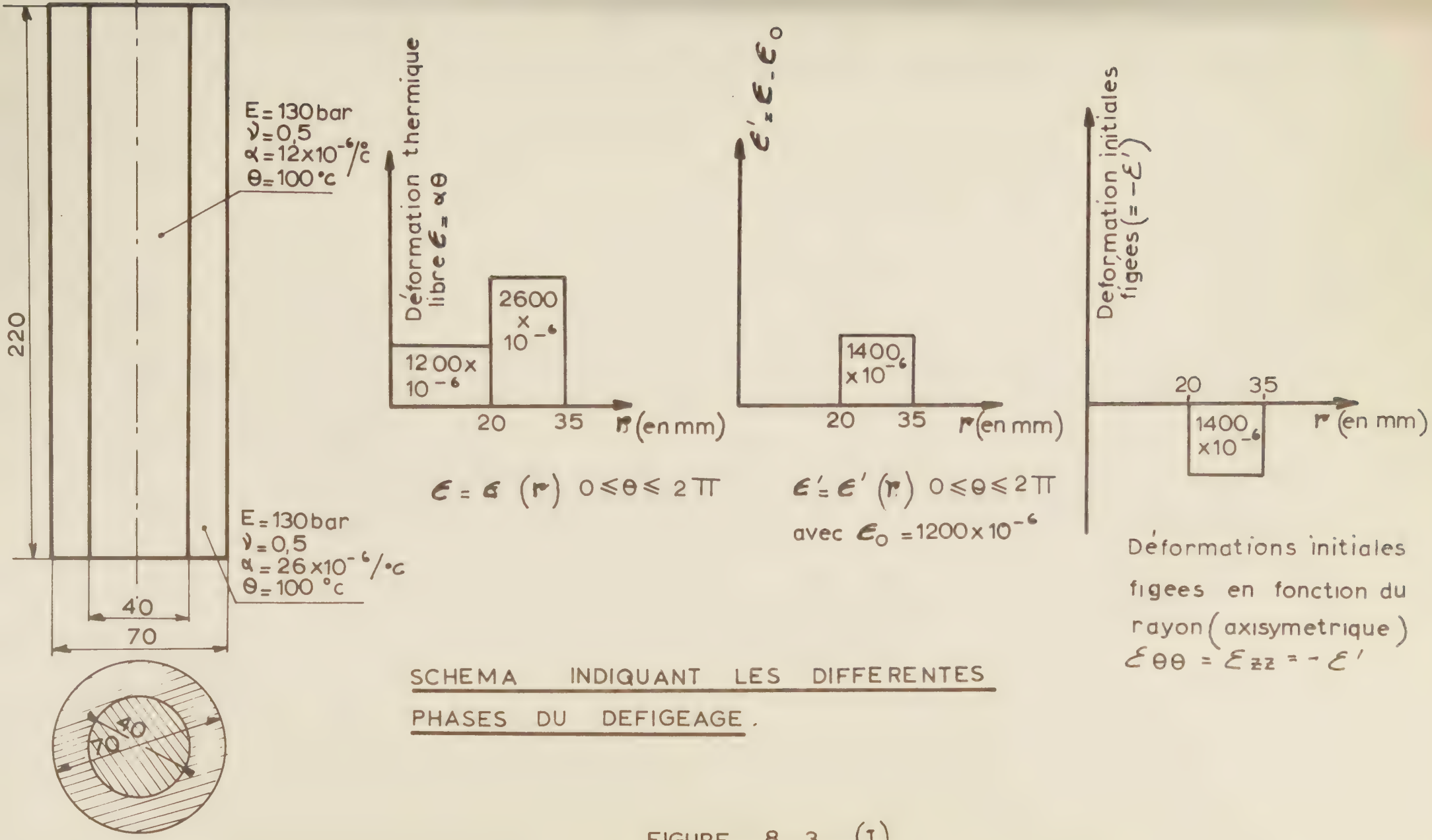
I - Obtention d'un régime de déformations dans lequel $e_{\theta\theta} = e_{zz}$ à la surface de contact

Ce régime de déformation s'obtient par figeage de la couronne sous l'effet simultané d'une compression axiale, définie par le chargement axiale P et d'une pression externe uniforme de valeur p. Si les rayons interne et externe de la couronne figée sont respectivement a et b, on a la relation suivante pour que la relation $e_{\theta\theta} = e_{zz}$ soit satisfaite au rayon c :

$$P = \frac{a^2 b^2 \pi p}{c^2} \qquad 8.3.1.\ (I)$$

Cette relation déterminera les valeurs de P et p. Le dispositif de chargement est indiqué sur les figures 8.3.1. (i).

.../...



$\varepsilon = \varepsilon(r)$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\varepsilon' = \varepsilon'(r)$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

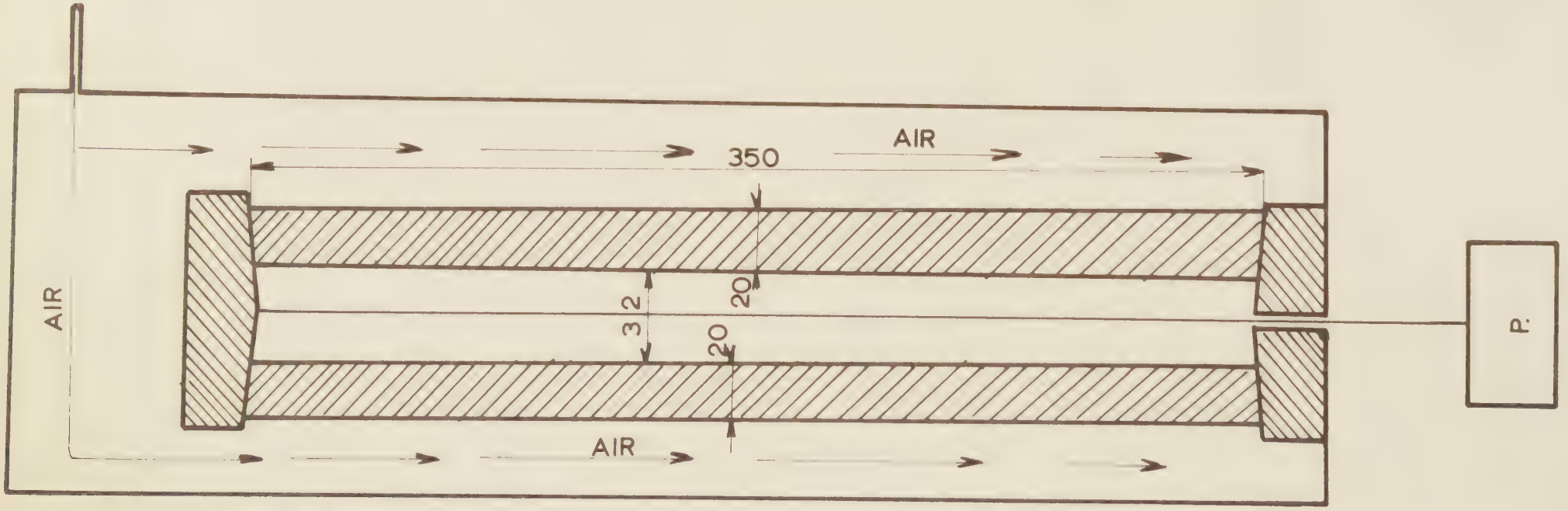
avec $\varepsilon_0 = 1200 \times 10^{-6}$

Déformations initiales figees en fonction du rayon (axisymetrique)

$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{zz} = -\varepsilon'$

SCHEMA INDIQUANT LES DIFFERENTES PHASES DU DEFIGEAGE.

FIGURE 8_3_(I)



DISPOSITIF DE CHARGEMENT DU CYLINDRE CREUX LONG EN COMPRESSION RADIALE ET AXIALE SIMULTANEE

II - Vérification expérimentale de la valeur de C théorique

La vérification expérimentale de la valeur de C prévue par la théorie, a été faite par l'observation d'une tranche mince de la couronne, éloignée ($\geqslant$ Ø extérieure) des extrêmités, en incidence normale et en incidence oblique.

En incidence normale :

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \frac{n - s}{t} \qquad \text{S.3.2. (2)}$$

où : n = ordre de frange
s = constante photoélasticimétrique
t = épaisseur de la tranche

Donc :

$$n = \frac{t}{s} \cdot (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = n\,(r)$$

En incidence oblique lorsque la rotation d'un angle Ø se fait autour du diamètre :

$$n_o = \frac{t}{s \cos \phi} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \cos^2 \phi - \sigma_{zz} \sin^2 \phi)$$

Etant donné que lorsque $e_{\theta\theta} = e_{zz}$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$ on a au lieu où $e_{\theta\theta} = e_{zz}$

$$n_o \cos \phi = \frac{t}{s} (\sigma_r - \sigma_\theta)$$

Donc si on trace les courbes de n et n_o en fonction de r le lieu où r = c sera défini par la rencontre de deux courbes

.../...

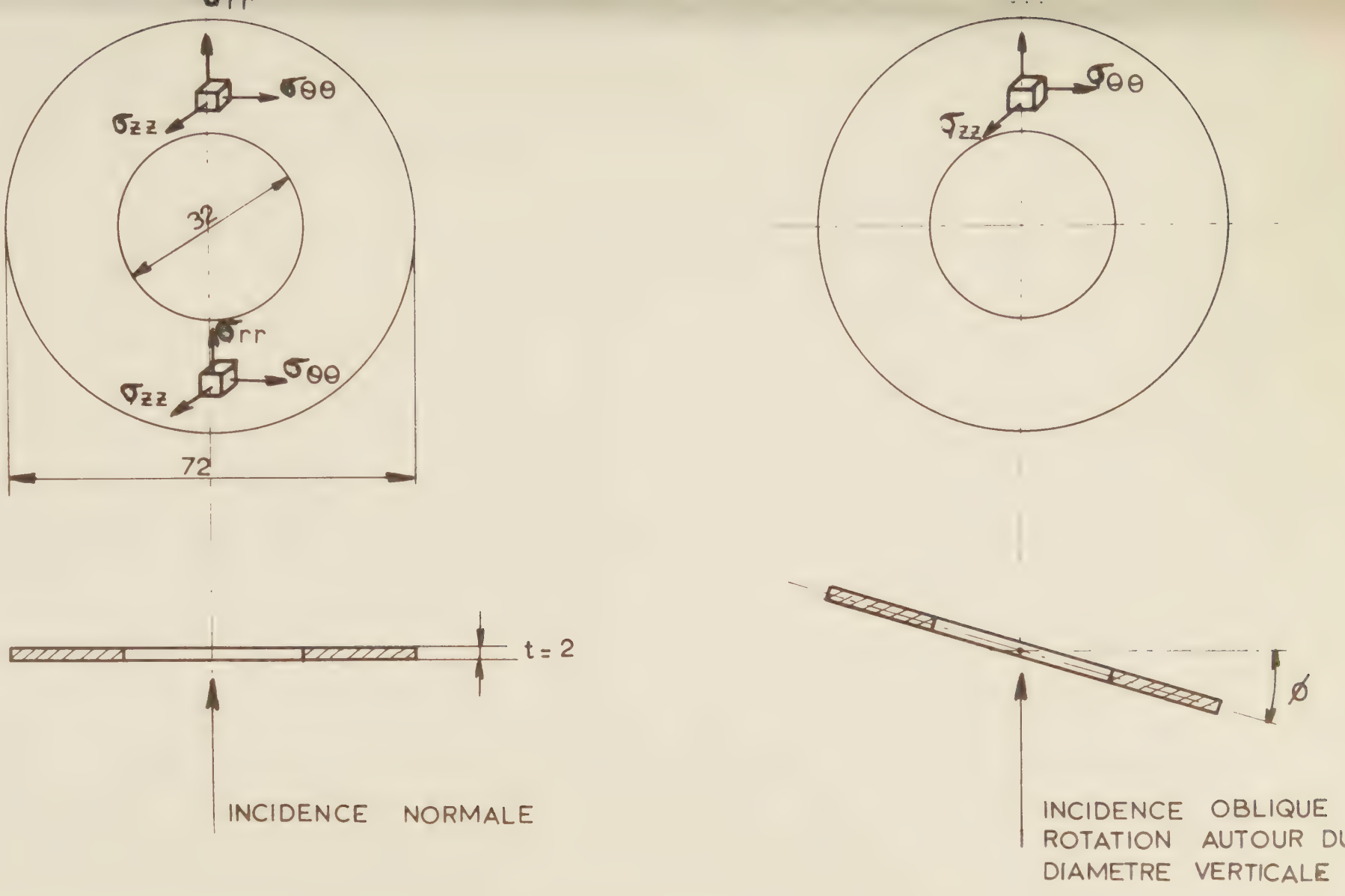

σzz
σθθ
3ℓ
σrr
σzz
σθθ
72
t = 2
INCIDENCE NORMALE
σzz
σθθ
ø
INCIDENCE OBLIQUE
ROTATION AUTOUR DU
DIAMETRE VERTICALE

FIGURE 8·3·1 (1)

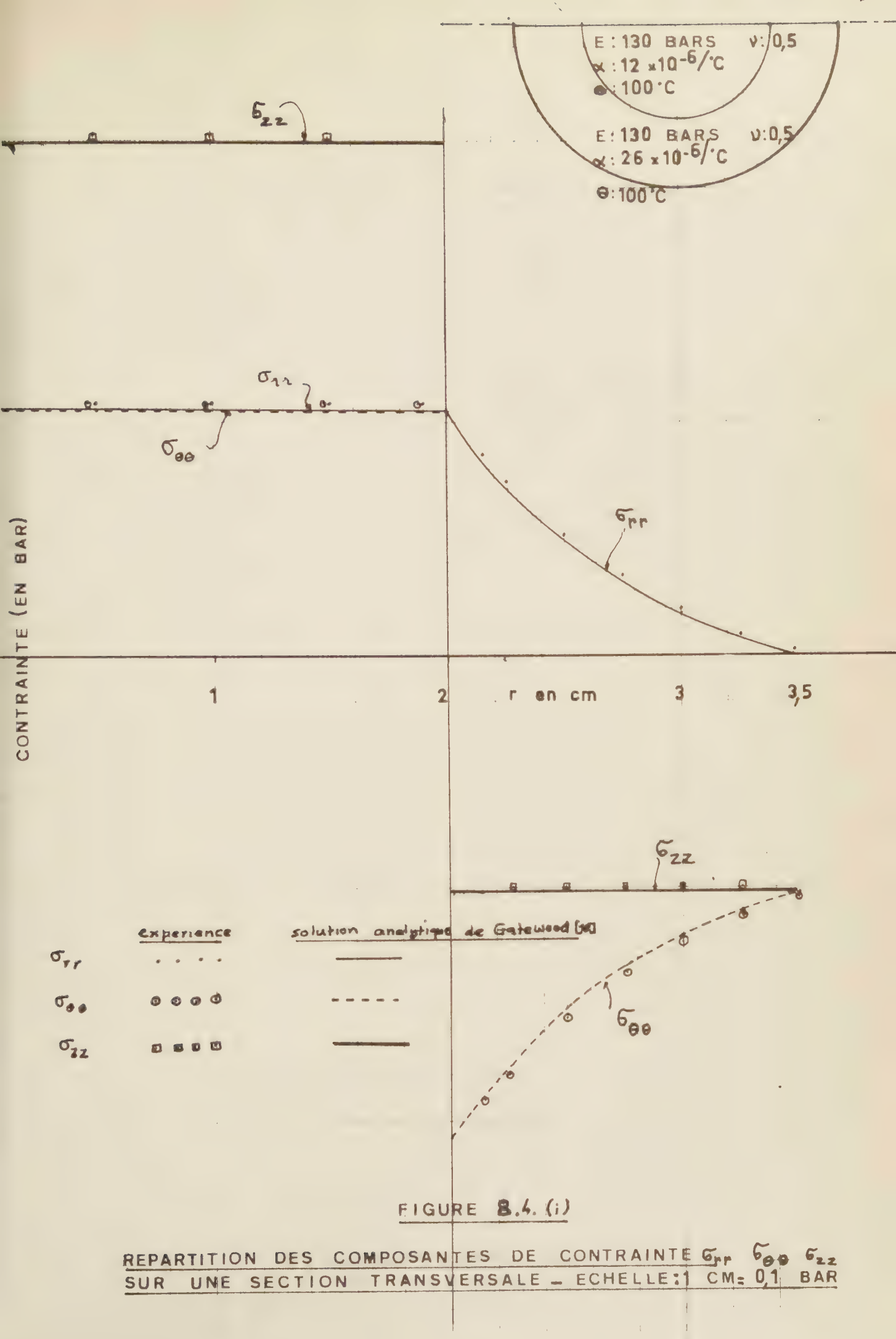


FIGURE 8.4. (i)

REPARTITION DES COMPOSANTES DE CONTRAINTE σ_{rr} $\sigma_{\theta\theta}$ σ_{zz} SUR UNE SECTION TRANSVERSALE – ECHELLE : 1 CM = 0,1 BAR

III - Défigeage

La couronne dont les dimensions ont été fixées préalablement en prévoyant un dernier usinage, est usinée au diamètre intérieur de 2C et au diamètre extérieur de $(2d - \varepsilon = 70)$. Elle a été collée sur le noyau et l'ensemble a été soumis au cycle thermique qui a redistribué les biréfringences initiales figées.

IV - Observation photoélasticimétrique

Une tranche perpendiculaire à l'axe du cylindre éloignée des extrêmités, et une tranche diamètrale parallèle à l'axe du cylindre, ont été observées en incidence normale pour obtenir les trois composantes de contraintes σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz}

8.4. Résultats théoriques et expérimentaux

La figure 8.2.2. (i) indique les résultats expérimentaux pour l'axe de symétrie du bloc tricouche.

La figure 8.2.3. (i) donne les résultats expérimentaux des contraintes dans le voisinage de l'interface 1 - 2 pour le bloc tricouche.

La figure 8.4. (i) donne les résultats expérimentaux et théoriques des contraintes pour un plan éloigné des extrêmités du corps cylindrique bicouche long.

Page

CHAPITRE 9 - Conclusions..... 128

CHAPITRE 9 - CONCLUSIONS

Au terme de cette étude, analysons la réponse mécanique des milieux continus isotropes et hétérogènes, sous l'effet des sollicitations thermiques et les méthodes expérimentales et théoriques qui ont permis d'y aboutir.

1 - Résultats

La concordance entre la théorie et l'expérience a été observée pour les champs de contraintes dans les exemples de problèmes thermoélastiques en milieu continu plan stratifié, et en milieu continu plan à sensibilité thermique. Les résultats des expériences sur un exemple en milieu spatial, bloc parallélipipédique tricouche, sous l'action d'une variation uniforme de température, sont présentés sans confrontation avec des résultats théoriques. Cependant sur la base des résultats en milieux tricouches plans qui sont les homologues plans du bloc parallélipipédique tricouche, il est permis d'affirmer que les profils de contraintes obtenus sont ceux prévisibles dans un pareil cas. D'autre part, le problème du corps cylindrique bicouche long pour lequel la solution analytique a été recoupée par l'expérience, prouve la validité de la méthode expérimentale dans l'étude d'un champ de contraintes tridimensionnelles.

Le régime de contraintes d'origine thermique dans un milieu continu multicouche fini, se caractérise, entre autres, par une singularité de contrainte au coin de l'interface. Elle provoque des difficultés à la fois pour le dépouillement photoélasticimétrique au niveau de l'interface, du fait de la réapparition de la composante de contrainte normale perpendiculaire au bord libre au coin de l'interface, et pour la résolution théorique par la méthode des différences finies lors de la "discrétisation" de la dérivée normale de la fonction de contrainte en ce point.

La composante de contrainte tangentielle et celle parallèle à l'interface, ont leurs valeurs stationnaires au niveau de l'interface. La composante perpendiculaire à l'interface présente un point d'inflexion au niveau de l'interface et des points stationnaires au voisinage de l'interface

.../...

Dans les milieux à sensibilité thermique les valeurs stationnaires des contraintes se confondent approximativement avec les lieux où le gradient spatial de la déformation thermique libre égale à $\int_0^{\theta=\theta(x_1,x_2)} \alpha(\eta)\,d\eta$ change de valeur.

Une analyse au moyen de la formulation sous forme de fonction de contrainte nous a amenés à conclure que dans un milieu multicouche plan dont le module d'élasticité est homogène par morceaux, le régime de contraintes dépend du coefficient de Poisson du milieu multicouche, indépendamment des profils spatiaux, du coefficient de dilatation thermique et de la température.

Les valeurs numériques obtenues par la méthode des différences finies indiquent que l'influence du coefficient de Poisson sur la composante de contrainte tangentielle (σ_{xy}) et sur celle parallèle à l'interface (σ_{xx}) est négligeable ; une influence maximale de l'ordre de 1 à 4 % pour une variation de la valeur du coefficient de Poisson de 0,5 à 0,25 a été constatée La composante de la contrainte perpendiculaire à l'interface (σ_{yy}) subit une influence importante lors de la variation du coefficient de Poisson ; une influence maximale de l'ordre de 15 % pour une variation du coefficient de Poisson de 0,1 est observée. Rappelons que les contraintes σ_{xy} et σ_{xx} sont plus grandes que la composante σ_{yy} dans le milieu continu multicouche. Donc, nous arrivons à la même conclusion que celle retenue en élasticité tridimensionnelle.

.../...

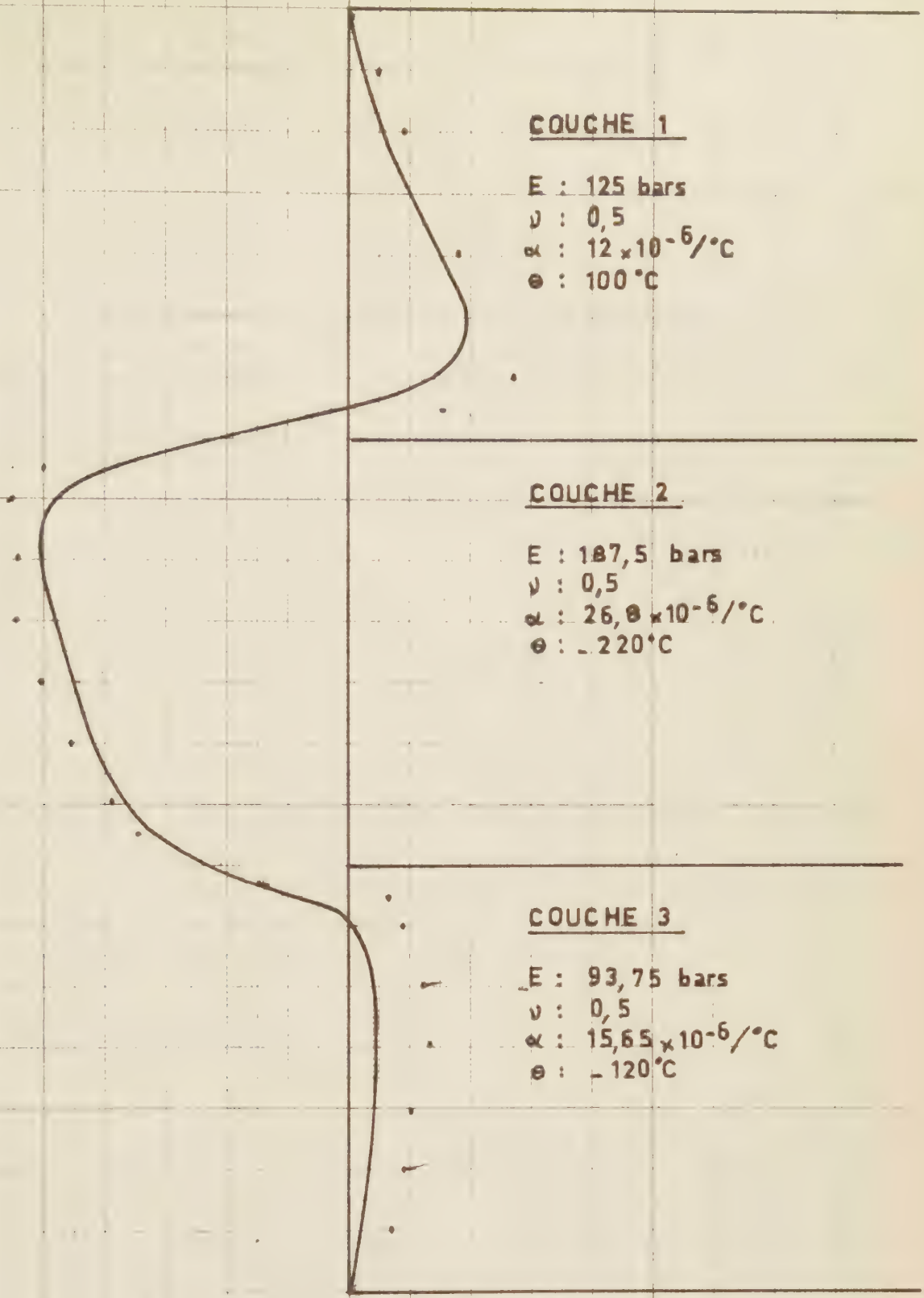


FIGURE 9 (i)

REPARTITION DE LA COMPOSANTE σ_{yy} SUR LE BORD LIBRE DU MILIEU CONTINU FINI A MODULE D'ELASTICITE ET COEFFICIENT DE DILATATION THERMIQUE HOMOGENE PAR MORCEAUX

_____ SOLUTION NUMERIQUE PAR DIFFERENCES FINIES
..... EXPERIENCE

2 - Solution théorique

Une formulation unifiée du problème thermoélastique relatif à la fois au milieu continu plan initialement hétérogène, et au milieu continu plan à sensibilité thermique, en admettant toute généralité quant aux lois de variation des constantes élastiques et thermiques et de la température est présentée sous forme d'une fonction de contrainte. La "discrétisation" mathématique de cette formulation est faite par la méthode des différences finies. La solution numérique ainsi obtenue s'accompagne d'erreurs provenant d'une part de l'approximation des dérivées partielles par leurs différences finies, laquelle est de l'ordre du pas du maillage rectangulaire, et d'autre part des approximations successives subies au cours de la résolution du système d'équations algébriques. La convergence de la solution numérique a été confirmée pour le cas d'une poutrelle bicouche sous l'action d'une variation uniforme de température par la solution analytique connue.

L'observation photoélasticimétrique du point isotrope au coin rectangulaire des bords libres, qui est un lieu de singularité frontalière, a permis de déterminer la forme en différences finies de la dérivée normale de la fonction de contrainte en ce point. La singularité de contrainte au coin d'interface est remplacée par un système bidimensionnel de contraintes, à orientation prédéterminée, en auto-équilibre en ce point.

3 - Méthode expérimentale

La méthode de défigeage de déformations thermiques libres permet de surmonter l'ensemble des inconvénients propres à la photothermoélasticimétrie directe provenant de la présence réelle du champ thermique. De plus, elle hérite de tous les avantages propres aux techniques photothermoélasticimétriques directes ; plus particulièrement les contraintes agissant sur les bords libres ou les surfaces extérieures dans un corps sous l'effet thermique seul qui peuvent être perturbées lors de la "discrétisation" mathématique de la dérivée normale de la fonction de contrainte dans la méthode des différences finies ou lors de l'application du système de forces extérieures que prévoit l'analogie de Duhamel, utilisée dans les méthodes de discrétisations physiques, telles que la méthode des équivalences [1] ou la méthode des éléments finis [61], sont obtenues sans aucune perturbation et avec précision par la photothermoélasticimétrie par défigeage, si les précautions voulues sont prises pour maitriser l'effet de bord (voir figure 9 (i)) .../..

Pourtant les inconvénients qui sont d'ailleurs propres aux techniques de figeage tels que le caractère destructif de la méthode, limitent son utilité aux fins d'optimisation des géométries.

La précision qu'on peut atteindre par la méthode de défigeage s'accroit en fonction de la valeur absolue des déformations thermiques initiales figées. Cependant, la dégradation des propriétés du matériau photo-élasticimétrique à la température de figeage, l'anisotropie qui peut être créée [35] par le caractère orienté des déformations figées dans l'état caoutchouteux du matériau et le compromis de la similitude géométrique du modèle avant et après le défigeage et éventuellement avec le prototype exigent le figeage initial des déformations plus petites que possible, ce qui compromettra donc la précision obtenue.

Le problème des matériaux en ce qui concerne le modelage du module d'élasticité (variation de la raideur du milieu plan ou matériaux à module variable à la température de figeage en milieu spatial) et du coefficient de dilatation thermique (approximation par une suite de déformations initiales compatibles par morceaux ou méthode de déformation unitaire) à l'exception du coefficient de Poisson, peut être surmonté en ayant recours à la méthode de défigeage.

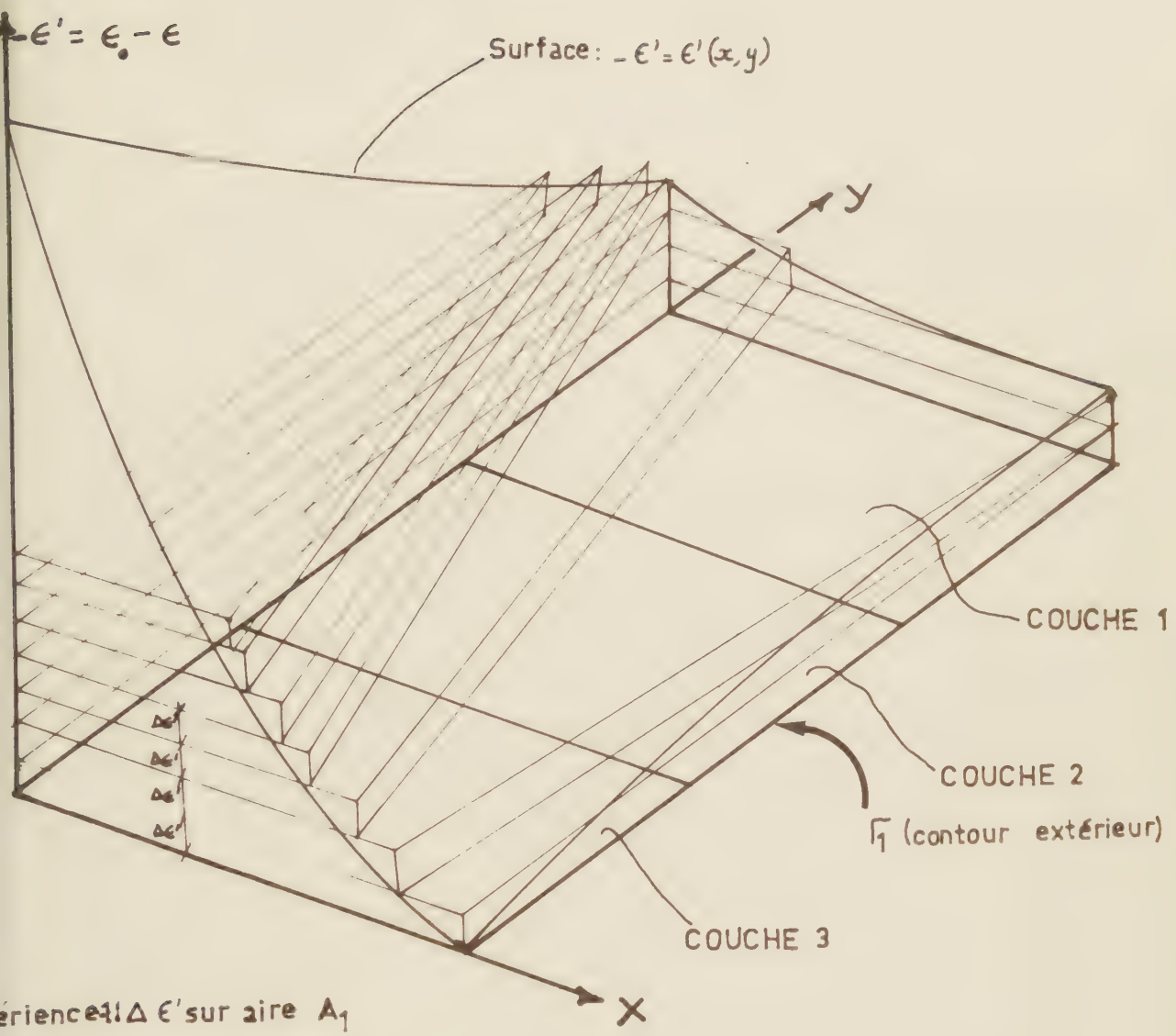
Ceci dit, il est possible de conclure que la méthode de défigeage permet d'aborder le problème général de thermoélasticité quasi-stationnaire et non couplé du milieu plan ou spatial qui soit hétérogène par inhérence ou à sensibilité thermique.

4 - Extensions possibles du problème traité

Dans les cas des milieux tricouches plans, nous nous sommes bornés à traiter les champs thermiques définis par des variations uniformes de température. S'il s'agit d'un champ thermique non-uniforme, il peut être abordé par les deux voies suivantes :

a) l'extension de la méthode de champ thermique unitaire au milieu hétérogène (appelée méthode de déformation thermique unitaire) permet d'obtenir le régime de contraintes sous l'effet d'un champ thermique non-uniforme bidimensionnel par la superposition appropriée d'une série d'expériences caractérisées par un champ thermique uniforme agissant sur une partie du milieu tricouche (voir figure 9 (ii)).

... ...



érience 1 : $\Delta\epsilon'$ sur aire A_1

érience 2 : $\Delta\epsilon'$ sur aire A_2

érience n : $\Delta\epsilon'$ sur aire A_n

où : $\epsilon = \alpha(x,y)\,\theta(x,y)$

ϵ_0 = valeur extrême du ϵ dans Γ_1

FIGURE 9(ii)

OBTENTION DES CONTRAINTES THERMIQUES DUES A UN CHAMP THERMIQUE BIDIMENSIONNEL DANS UN MILIEU CONTINU TRICOUCHE PAR LA METHODE DE DEFORMATION UNITAIRE

b) Il est possible, en principe, d'approcher un profil donné de la température par une suite de profils de déformations thermiques libres correspondantes qui soient géométriquement compatibles : par exemple, l'approximation par une suite des déformations thermiques libres linéaires par morceaux, comme nous l'avons fait dans le chapitre 7.

L'extension des résultats obtenus pour le régime de contraintes planes au régime de déformations planes, peut être effectuée par la transformation connue des constantes élastiques et thermiques.

Cette étude a porté sur les contraintes d'origine thermique dans le cadre de l'élasticité linéaire. Le comportement des matériaux structuraux aux températures élevées s'écarte de l'hypothèse de linéarité du fait de la prédominance des effets rhéologiques [16] tels que la viscoélasticité et la viscoplasticité.

Dans le cas de la viscoelasticité linéaire, l'analogie élastique-viscoélastique [21][36] (dite d'Alfrey) permet de transformer les constantes élastiques et la fonction de contraintes en thermoélasticité linéaire au moyen de la transformation de Laplace et de résoudre les relations transformées par les méthodes numériques telles que la méthode des différences finies.

BIBLIOGRAPHIE CITEE

1 - ABSI E. - "Théorie des équivalences" II - Etude de problèmes particuliers - Annales I.T.B.T.P., Sept. 70, N° 273 pp 50 - 63

2 - BIOT M.A. - "A general property of two dimensionnal thermal stress distribution" - Phil. Mag. Vol. 19, Mars 1935, pp 540 - 549

3 - BLEJWAS T.E. et al - "Photothermoelastic stresses in a composite model" Exp. Mech., Oct. 69 - pp 478 - 480

4 - BOGY P.B. et WANG K.C. - "Stress singularity at interface corners in bonded dissimular isotropic elastic materials" - Int. Jnl Solids and Structures - Août 71, pp 993 - 1005

5 - BOLEY B.A. et WEINER J.H. - "Theory of thermal stresses" - John Wiley, N.Y. 1960

6 - BONVALET Ch. - "Les applications de la similitude physique à l'étude des structures du génie civil" - Eyrolles - Gauthier Villars, 1971

7 - BRYAN R et al - "Apollo thermal protection system developpment" - Jnl spacecraft and rockets - Juin 70, pp 727 - 734

8 - CARLSON D.E. - "Dependance of linear elastic solution on the elastic constants" - Jnl Elasticity, Déc. 71, pp 145 - 152

9 - DAVIS J.B. et SWINSON W.F. - "Experimental investigation of transient thermal stresses in a solid sphere" - Exp. Mech. - Sept. 68 pp 424 - 428

10 - DUNDURS J. - "Dependance of stress on Poisson's ratio in plane elasticity" - Int. Jnl Solids Structures, Nov. 67 pp 1013 - 1021

11 - DURELLI A.J. et al - "Application of a new deformeter to two dimensionnal thermal stress problems" - Proc. S.E.S.A., N° 2, 1956 pp 97 - 106

12 - DURELLI A.J. et al - "Determination of thermal stresses in three-ply laminates" - Jnl. Appl. Mech. - Juin 1955, pp 190 - 192

.../...

13 - ERINGEN A.C. - "Thermal stresses in multiple layer beams" - Proc. First Midwestern Conf. Solid Mech. Illinois, 1953 pp 69 - 73

14 - FEN' G.A. et al - "Thermal stresses in a many layererd plate of finite length" Soviet applied Mechanics, N° 1, 1968 (traduction de Prikladnaya Mekhanika) pp 94 - 102

15 - FORSYTHE G.E. et WASOW W.R. - "Finite Difference Methods for partial differential equations" John Wiley, N.Y. 1960

16 - FREUDAUTHAL A.M. - "Effect of rheological behaviour on thermal stress" J. App. Phys., 1954, Vol. 25, pp 1110 - 1114

17 - FROCHT MM et al - "A special investigation to develop a general method for three dimensionnal photoelastic stress analysis" N.A.C.A., T N 2822, 1952, Washington

18 - GATEWOOD B.E. - "Thermal stresses" Mc Graw Hill, N.Y. 1957

19 - GERARD G. - "Progress in photothermoelasticity" Int. Symp. Photoelasticity, illinois, Oct. 61

20 - HILTON H.H. - "Thermal stresses in bodies exhibiting temperature dependant properties" J. Appl. Mech. 74; 1952, 350

21 - HILTON H.H. et al - "An extension of Alfrey's analogy to thermal stress problems in temperature dependant linear viscoelastic media" J. Mech. Phys. Solids 9, 1961, 152

22 - HOFF N.J. - "High temperature effects in aircraft structures" Pergamon Press, N.Y., 1958

23 - ISMAIL I.A. et NOWINSKII J. - "Thermoelastic problem for shells of revolution exhibiting temperature dependant properties" - App. Scie. Research, Vol. 14 N° 3, 1964/1965, pp 211 - 232

24 - KARNOZHITSKII V.P. "Temperature stresses in a three-layered cylindrical shell of finite length" Soviet Applied Mechanics (traduction de Prikladnaya Mekhanika) N° 5, 1967 pp 33 - 38

.../...

25 - KHESIN G.L. et al-" Détermination photoelasticimétrique des contraintes thermiques dans les ouvrages souterrains (en Russe) Osnov. Fundam Mekh. Gruntov. N° 2 1965, Mars Avril 1965, pp 16 - 17.

26 - KHESIN G.L. et al- "Modelling of a thermoelastic problem for gravity dams with widened joints" Hydrotechnical Construction (traduction de Gidrot Stroit) N° 6 , 1967

27 - KHESIN G.L. et al- "Thermoelastic stress research by the method of "unfreezing" free thermal strains" Experimental stress analysis and influence in design, Congrès Cambridge, G.B. Sept. 1970

28 - KHESIN G.L. et al- "Technique photoelasticimétrique pour l'analyse des déformations thermiques dans les blocs utilisés dans les constructions hydrauliques (en Russe) Gidrot Stroit, N° 12, Déc. 1968 - pp 12 - 15

29 - KOVALENKO A.D. - "Developpement de la recherche dans les domaines de la thermoélasticité, de la thermoplasticité et de la thermoviscoélasticité"(en russe) - Prikladnaya Mekhanika N° 12, 1969, pp 1 - 16

30 - LAGARDE A et FORTUNE M. - "Sur l'influence des caractéristiques physiques des matériaux sur l'état des contraintes dans le problème thermoélastique plan pour un domaine borné multiplement connexe, soumis à un champ harmonique de température et à une densité de force donnée sur le contour" - Application a la photothermoélasticimétrie C.R. Acad. Science, T. 270, 9 mars 1970, Série A - pp 679 - 682

31 - LURE A.I. - "Three dimensional problems of the theory of elasticity" - Interscience publishers, N.Y., 1964

32 - MEREND A. et SLOT. T. - "Stress analysis of thuck walled tube with step changes in thermal expansion" - Exp. Mech. Mars 1972 pp 136 - 141.

.../...

33 - MICHELL J.H. - "On the direct determination of stresses in an elastic solid with application to the theory of plates" - Proc. Lond. Math. Soc. Vol. XXXI - Avril 1899 à Déc. 1899

34 - MURAYAMA S. - "Effect of temperature on elasticity of clays" dans "Effect of temperature and heat on Engineering behaviour of soils" pp 194 - 203 -Congrès Washington 1969

35 - NIELSEN L.E. - "Mechanical properties of polymers" Reinhold = publishing coperation, N.Y., 1962

36 - NOWACKI W. - "Thermoelasticity" - Pergamon Press 1962

37 - NOWACKI W. - "New trends of investigation in thermoelasticity" General lecture dans "Theory of two and three dimensionnal structures" Congrès Smolenice (Slovaquie 1963)

38 - NOWACKI W. - "Problems of thermoelasticity" dans "Progress in Aeronautical Sciences" - pp. 1 - 65, Vol. 10, 1970

39 - NOWINSKII J. - "Thermoelastic problem of an isotropic sphere with temperature dependant properties" - Z.A.M.P. 10 (1959), pp 565 - 575

40 - NOWINSKII J. - "Transient thermoelastic problem for an infinite medium with spherical cavity exhibiting temperature dependant properties" - J. App. Mech. Juin 62 - pp 399 - 407.

41 - NOWINSKII J. - "Axisymmetric problem of the steady state thermal stress in elastic medium with temperature dependant properties" - App. Scien. Research. Vol. A, XII pp. 349 - 360, 1964

42 - NUSSELT W. - "The fundamental law of heat transfer"(traduit de l'allemand) Gesundheits Ingenieur 38 (42) 477 - 482 et 43 (490 - 496), 1915

.../...

43 - PARIDA J et DAS A.K. -"Note on the thermal stress in an incompressible non-homogenious sphere in periodic temperature field" Bull. Acad. Polonaise Scie. Série Sc. Tech. 18, 1, 1 - 6, 1970

44 - PARKS V.J. et al- "Temperature and time influence in stress freezing of the epoxy hysol 4290" - Exp. Mech. Jan. 1971, pp 33 - 37

45 - PRIGOROWSKII N.I.- et VARDANYAN G.S. "Determination des contraintes thermoélastiques par la photoélasticimétrie" (en Russe) Zav. Lab. N° 9, 1961, pp 1129 - 1134

46 - SAMPSON R.C. et LEVEN M.M. - "Photoelastic stress and deformation of nuclear components" - Proc. S.E.S.A. 1959 (17), 1, pp 161-180

47 - SAVCHENKO V.I. et al - "Obtaining temperature fields in plane photoelastic model" - Ind. Lab. Juillet 1963, pp 941 - 943

48 - SCHNEIDER P.J. - "Temperature response charts" - John Wiley N° 4, 1963

49 - SLOT T. - "Photoelastic simulation of thermal stresses by mechanical pre-straining" Exp. Mech. Sept. 65, pp 273 - 281

50 - SOKOLOWSKII M. - "One dimensional thermoelastic problem for elastic bodies with material constants depedant on temperature" Bull. Acad. Polon. Scie. Série Scien. Tech.1960, VOL. 8, N° 4

51 - STERNBERG E et MUKI R. - "Note on expansion in powers of Poisson's ratio of solutions of elastostatics" Arch. Ration. Mech. Analysis 3, 229, 1959

52 - TAUBER M.E. et al - "Heating environment and protection during jupiter entry" - Jnl. Spacecraft and Rockets, Juin 1971, pp 636 - 640

53 - TIMOSHENKO S.P. - "Analysis of bimetallic thermostats" dans "Collected papers of S. TIMOSCHENKO".

54 - TROSTEL R. - "Stationaire wärmespannungen mit temparturabhangigen werten" (traduction C.N.R.S.) Ing. Archiv. 26 (1958), pp 134 - 142

.../...

55 - WAYMIRE G.R. - "Applied mechanics for fast test reactor" - Nucl. Eng. Design, Vol. 19, N° 2 - 1972

56 - WEIBEL E.E. - "Thermal stresses in cylinders by photoelastic method" - Proc. 5th Congr. Mech. - Cambridge, Mass. 1938, analyse dans "Handbook of experimental stress analysis" - Ed. Hélenyi

57 - WENDT W. et al (ed) - "Mechanics of composite materials" Proc. 5th Symp. Naval Struct. Mech. 1970

58 - WILLIAMS H.E. - "Axisymmetric thermal stresses in sandwich shells of revolution" - A.I.A.A. Jnl. - 5, 981 - 990; 1967

59 - ZANDMANN F et al - "Photoelastic coating analysis in thermal fields" Exp. Mech. Sept. 63 - 215 - 221.

60 - ZIENKIEWICZ O.C et al - "A stress function approach to interface and mixed boundary condition problems" - Int. Jnl. Mech. Sci. Vol. 2 - pp 93 - 101, 1960

61 - ZIENKIEWICZ O.C- et al - "Thermal stress and temperature field : A finite element approach" - pp 331 - 333 dans "Thermal stress and thermal fatigue" - Butterworths, London 1971

ANNEXE 1

CONDITIONS DE SIMILITUDE POUR LES CHAMPS THERMIQUES DANS LES SOLIDES ISOTROPES

Nous reproduisons ci-après les conditions de similitude pour les champs thermiques dans les solides isotropes soumis aux diverses conditions a aux limites thermiques, exprimées sous forme de fonction des nombres adimensionnels.

1 - CORPS SOLIDES DONT LA TEMPERATURE DE LA SURFACE EXTERIEURE EST MAINTENUE CONSTANTE à T_e

$$\frac{T_i - T_o}{T_e - T_o} = \phi \left(\frac{x_i}{L}, Fo\right)$$

où : T_i = température au point x_i (x_1 x_2 x_3) au temps t_i

T_o = température initiale

T_e = température de la surface extérieure

$F_o = \frac{k \cdot t_i}{L^2}$ = nombre de Fourier

avec : k = diffusivité thermique

t = temps

L = dimension type linéaire

k, t, L sont exprimés en système de mesure cohérent

2 - CORPS SOLIDE DONT LA TEMPERATURE DE LA SURFACE EXTERIEURE, VARIE SUIVANT UNE LOI LINEAIRE EN FONCTION DU TEMPS

$$\frac{T_i - T_o}{Ct_i} = \phi \left(\frac{x_i}{L}, Fo\right)$$

avec : $T_e = T_o + Ct_i$

.../...

3 - CORPS SOLIDE SUSPENDU DANS UN FLUIDE MAINTENU A UNE TEMPERATURE CONSTANTE T_a

$$\frac{T_i - T_o}{T_a - T_o} = \phi \left(\frac{x_i}{L}, Bi, Fo\right)$$

où : T_a = température du fluide (constante)

$Bi = \frac{h\,L}{\lambda}$ = nombre de Biot

où : h = coefficient de transmission calorifique superficielle

L = dimension type linéaire

λ = conductibilité thermique du corps

h, l, λ sont exprimés en système de mesure cohérent.

4 - CORPS AUQUEL LA CHALEUR EST TRANSMISE AVEC UNE VITESSE CONSTANTE

$$\frac{\lambda (T_i - T_o)}{2 q \sqrt{kt}} = \phi \left(\frac{x_i}{L}, Fo\right)$$

où : F(o) = nombre de Fourier = $\frac{kt}{L^2}$

et λ = conductibilité thermique

q = vitesse de réchauffement (ou refroidissement) (exprimé par exemple en watt)

5 - CORPS AUQUEL LA CHALEUR EST TRANSMISE AVEC UNE VITESSE VARIABLE SUIVANT UNE LOI EXPONENTIELLE DU TEMPS

$$T_i - T_o = \frac{q_o}{\lambda t_o \sqrt{kt_i}} \phi \left(\frac{x_i}{L}, \frac{t_i}{t_o}\right)$$

avec $q = q_o \left(\frac{t}{t_o}\right)^n$

où q_o = quantité totale de la chaleur transmise en période de temps $t_o = \int_o^{t_o} q\, dt$

.../...

6 - CORPS QUI TRANSMET LA CHALEUR PAR RAYONNEMENT

La réponse thermique d'un corps lors de soumission subite à une source de rayonnement, est donnée par la relation suivante :

$$\frac{T_i}{T_o} = \phi \left(\frac{T_o}{T_s}, \frac{x_i}{L}, \frac{\sigma F_A F_\epsilon T_s^3}{\rho C L} t_i \right)$$

où : T_s = température de la source de rayonnement
σ = constante de Stefan - Boltzmann
F_A = facteur de configuration de la surface de rayonnement
F_ϵ = émissivité de la surface de rayonnement
ρ = densité du matériau du corps
C = chaleur spécifique du matériau du corps

ANNEXE II

EXTENSION DE L'ANALOGIE DE DUHAMEL AU MILIEU CONTINU ISOTROPE NON-HOMOGENE

L'analogie de Duhamel a pour but de remplacer un problème de thermoélasticité par un problème d'élasticité pure avec les forces massiques.

Considérons un milieu continu isotrope non-homogène, limité par la surface S. L'hétérogénéité du milieu continu se caractérise par la dépendance aux coordonnées spatiales des deux constantes de Lamé, à savoir λ et μ

Donc : $\lambda = \lambda (x_1\ x_2\ x_3)$

$\mu = \mu (x_1\ x_2\ x_3)$

Avec : $\lambda = \dfrac{E\ \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$ et $\mu = \dfrac{E}{2(1 + \nu)}$

où : E = module d'élasticité du milieu continu

ν = son coefficient de Poisson

Supposons que la surface S soit soumise aux faces extérieures $\overset{n}{T}_i = \sigma_{ij}\, n_i = g_i\ (x_1\ x_2\ x_3)$... (1)

où n_i désigne le vecteur unitaire normal dans le sens extérieur et agissant sur la surface S.

Le champ de contraintes σ_{ij} dans le milieu continu s'exprime :

$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}\ \delta_{ij} + 2\mu\ \varepsilon_{ij}$ (2) i, j, k = 1, 2, 3

δ_{ij} = symbole de Kronecker

= 1 pour i = j

= 0 pour i ≠ j

avec $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\ (u_{i,j} + u_{j,i})$ (3)

représentant le champ de déformation.

.../...

u_i 0, i = 1, 2, 3 sont les composantes du déplacement suivant les axes de coordonnées x_1 x_2 x_3.

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\sigma_{y,j} + X_i = 0 \qquad (4)\ i,j = 1, 2, 3$$

où X_i = forces massiques

On éliminera des σ_{ij} et ε_{ij} parmi les équations (2), (3) et (4) en tenant compte de la dépendance spatiale des constantes de Lamé λ, μ pour aboutir aux équations d'équilibre exprimées en fonction des composantes du champ de déplacement (dites équations de Navier).

$$\lambda_{,i}(u_{j,j}) + \lambda u_{j,ji} + \mu_{,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + X_i = 0 \qquad (5)$$

avec les conditions aux limites exprimées par l'équation :

$$T_i^n = \sigma_{ij} n_i = (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}) n_i = g_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (6)$$

Supposons maintenant que le milieu continu soit soumis à un champ thermique $\theta = \theta(x_1, x_2, x_3)$. La loi de Hooke généralisée s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \gamma \delta_{ij} \qquad (2)^*$$

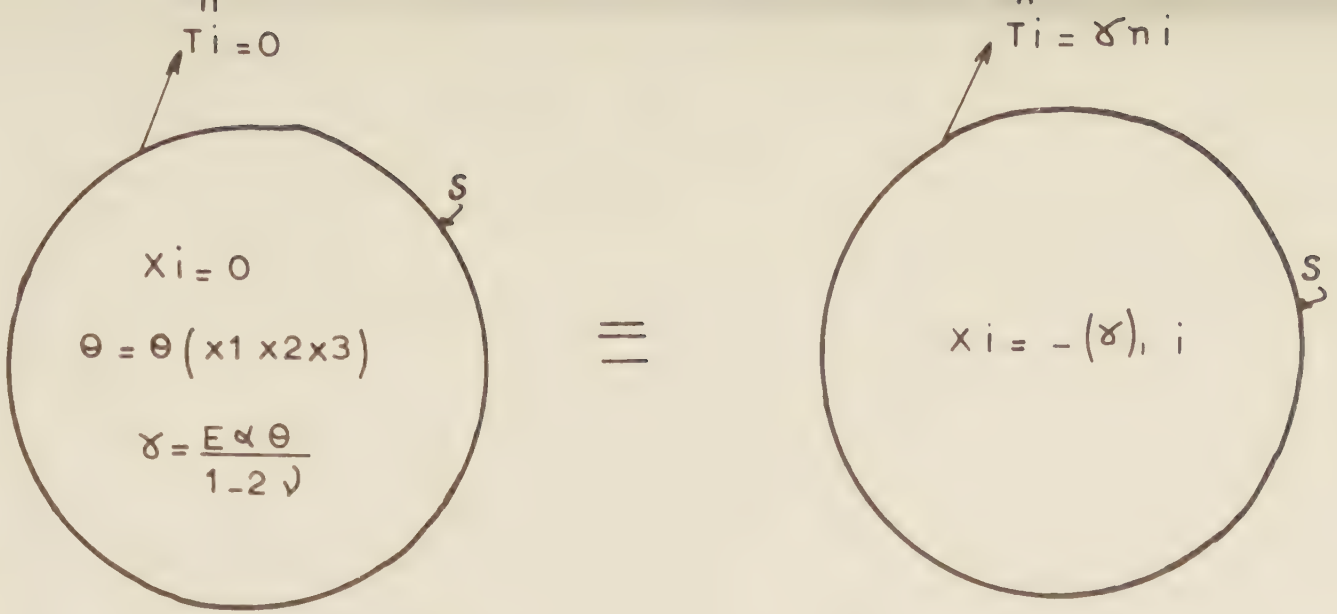
dans laquelle : $\gamma = \dfrac{E\alpha}{1 - 2\nu} = \gamma(x_1, x_2, x_3)$

Les équations d'équilibre et les relations déformations-déplacements dans le nouveau régime sont les mêmes, à savoir :

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \qquad (4)^*$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (3)^*$$

.../...



PROBLEME DE THERMOELASTICITE PURE.

Avec un champ de déformations volumique égal à $\epsilon_{ij} = -\alpha\theta\,\delta_{ij}$

PROBLEME EQUIVALENT EN ELASTICITE PURE AVEC FORCES MASSIQUES

ANALOGIE DE DUHAMEL

FIGURE 1

En procédant à l'élimination des σ_{ij} et ε_{ij} parmi les équations 2* 3* et 4*, on obtient les équations d'équilibre exprimées en fonction du champ de déplacement en régime thermique

$$\lambda_{,i}\,(u_{j,j}) + \lambda u_{j,ji} + \mu_{,j}\,(u_{i,j} + u_{j,i}) + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij})$$

$$+ \; X_i - (\gamma)_i \;\; = 0 \qquad\qquad 5^*$$

Avec les conditions aux limites :

$$\sigma_i\,(x_1\; x_2\; x_3) = \sigma_{ij}\, n_i$$

$$= (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij} - \gamma\, \delta_{ij}) n_i \qquad\qquad 6^*$$

Comparons les équations (5) et (6) avec leur homologue en régime thermique de $(5)^*$ et $(6)^*$. On cloncura que l'effet du champ thermique peut être remplacé par un champ de forces massiques équivalent à $-(\gamma)_i$ et un champ de forces sur la surface extérieure équivalent à $\overset{n}{T}_i = \gamma n_i$. Les champs de déplacement et de déformations sont identiques dans les deux systèmes équivalents.

Le champ de contraintes dans le milieu continu sous l'effet thermique s'obtient (en utilisant l'équation 2) par la superposition d'une compression hydrostatique $\sigma_{ij} = -\gamma \delta_{ij}$. Cette compression hydrostatique peut s'obtenir à l'aide d'un champ de déformation hydrostatique égale à $\varepsilon_{ij} = -\alpha\, \theta\, \delta_{ij}$

$$= -\varepsilon\, \delta_{ij}$$

La figure montre ainsi, un système en chargement mécanique équivalent à un système soumis à un champ thermique.

ANNEXE III - FORME EN DIFFERENCES FINIES DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES RELATIVES AU MILIEU CONTINU PLAN, ISOTROPE, HETEROGENE

La variation locale de la fonction de contrainte $\phi = \phi(x, y)$ autour du point (i, j) est représentée par la loi suivante :

$$\phi = \phi_{ij} + ax + by + cx^2 = dxy + fy^2$$

où : ϕ_{ij} est la valeur de la fonction de contrainte au point (i,j)

Les dérivées spatiales supérieures à la seconde, s'obtiennent par un artifice analogique. Lors de la "discrétisation", on distinguera quatre types de point.

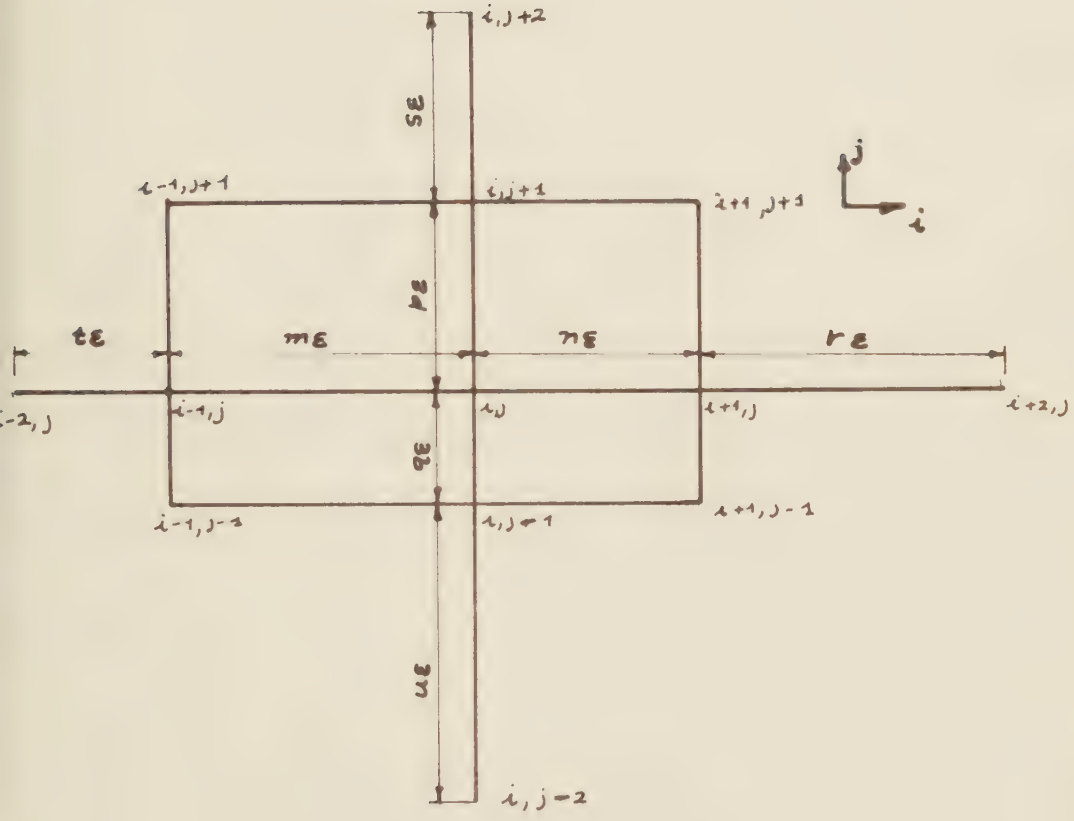
1 - Point intérieur (dont la distance à l'interface suivant l'axe des Y est plus grande ou égale à la plus petite des $(q + u)\,\varepsilon$ ou $(p + s)\,\varepsilon$

2 - Point qui se trouve un pas au-dessous de l'interface.

3 - Point qui se trouve un pas au-dessus de l'interface.

4 - Point qui se trouve à l'interface

Voir page 158 pour la signification des symboles utilisés dans l'annexe III.



POINT MOBILE (i j) ET LES "VOISINS" DU MAILLAGE
RECTANGULAIRE GENERAL

point type intérieur

$$
\begin{aligned}
&(A_{ij} g_0 + 2\lambda_{ij} e_0 + 2\mu_{ij} f_0 + 2\eta_{ij} d_0 + \omega_{ij} b_0 + \gamma_{ij} c_0)\, \phi_{ij} \\
&+ (A_{ij} g_1 + 2\lambda_{ij} e_1 + 2\mu_{ij} f_1 + 2\eta_{ij} d_1 + \omega_{ij} b_1)\, \phi_{i+1,j} \\
&+ (A_{ij} g_2 + 2\lambda_{ij} e_2 + 2\mu_{ij} f_2 + 2\eta_{ij} d_2 + \gamma_{ij} c_2)\, \phi_{i,j+1} \\
&+ (A_{ij} g_3 + 2\lambda_{ij} e_3 + 2\mu_{ij} f_3 + 2\eta_{ij} d_3 + \omega_{ij} b_3)\, \phi_{i-1,j} \\
&+ (A_{ij} g_4 + 2\lambda_{ij} e_4 + 2\mu_{ij} f_4 + 2\eta_{ij} d_4 + \gamma_{ij} c_4)\, \phi_{i,j-1} \\
&+ (A_{ij} g_5 + 2\lambda_{ij} e_5 + 2\mu_{ij} f_5 + 2\eta_{ij} d_5)\, \phi_{i+1,j+1} \\
&+ A_{ij} g_6 + 2\lambda_{ij} e_6 + 2\mu_{ij} f_6 + 2\eta_{ij} d_6)\, \phi_{i-1,j+1} \\
&+ (A_{ij} g_7 + 2\lambda_{ij} e_7 + 2\mu_{ij} f_7 + 2\eta_{ij} d_7)\, \phi_{i-1,j-1} \\
&+ A_{ij} g_8 + 2\lambda_{ij} e_8 + 2\mu_{ij} f_8 + 2\eta_{ij} d_8)\, \phi_{i+1,j-1} \\
&+ (A_{ij} g_9 + 2\lambda_{ij} e_9)\, \phi_{i+2,j} + (A_{ij} g_{10} + 2\mu_{ij} f_{10})\, \phi_{i,j+2} \\
&+ (A_{ij} g_{11} + 2\lambda_{ij} e_{11})\, \phi_{i-2,j} + (A_{ij} g_{12} + 2\mu_{ij} f_{12})\, \phi_{i,j-2} + \beta_{ij} = 0
\end{aligned}
$$

On écrira la même équation pour un point intérieur qui se trouve dans la couche inférieure, en tenant compte des valeurs respectives des fonctions de caractéristiques mécaniques et thermiques (voir page 158). Les valeurs des coefficients (voir page 159) restent invariables.

point qui se trouve un pas au dessous de l'interface

$$(A_{ij}\, g_{10} + 2\mu_{ij}\, f_{10})\, L_{10} + (A_{ij}\, g_0 + 2\lambda_{ij}\, e_0 + 2\mu_{ij}\, f_0 + 2\eta_{ij}\, d_0$$

$$+ \omega_{ij}\, b_0 + \gamma_{ij}\, c_0)\, \phi_{ij} + (A_{ij}\, g_1 + 2\lambda_{ij}\, e_1 + 2\mu_{ij}\, f_1 + 2\eta_{ij}\, d_1 + \omega_{ij}\, b_1)\, \phi_{i+1,j}$$

$$+ (A_{ij}\, g_2 + 2\lambda_{ij}\, e_2 + 2\mu_{ij}\, f_2 + 2\eta_{ij}\, d_2 + \gamma_{ij}\, c_2)\, \phi_{i,j+1}$$

$$+ (A_{ij}\, g_3 + 2\lambda_{ij}\, e_3 + 2\mu_{ij}\, f_3 + 2\eta_{ij}\, d_3 + \omega_{ij}\, b_3)\, \phi_{i-1,j}$$

$$+ (A_{ij}\, g_4 + 2\lambda_{ij}\, e_4 + 2\mu_{ij}\, f_4 + 2\eta_{ij}\, d_4 + \gamma_{ij}\, c_4)\, \phi_{i,j-1}$$

$$+ (A_{ij}\, g_5 + 2\lambda_{ij}\, e_5 + 2\mu_{ij}\, f_5 + 2\eta_{ij}\, d_5)\, \phi_{i+1,j+1}$$

$$+ (A_{ij}\, g_6 + 2\lambda_{ij}\, e_6 + 2\mu_{ij}\, f_6 + 2\eta_{ij}\, d_6)\, \phi_{i-1,j+1}$$

$$+ (A_{ij}\, g_7 + 2\lambda_{ij}\, e_7 + 2\mu_{ij}\, f_7 + 2\eta_{ij}\, d_7)\, \phi_{i-1,j-1}$$

$$+ (A_{ij}\, g_8 + 2\lambda_{ij}\, e_8 + 2\mu_{ij}\, f_8 + 2\eta_{ij}\, d_8)\, \phi_{i+1,j-1}$$

$$+ (A_{ij}\, g_9 + 2\lambda_{ij}\, e_9)\, \phi_{i+2,j} + A_{ij}\, g_{11} + (2\lambda_{ij}\, e_{11})\, \phi_{i-2,j}$$

$$+ (A_{ij}\, g_{12} + 2\mu_{ij}\, f_{12})\, \phi_{i,j-2} + \beta_{ij} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$d_0' L_0 - d_{10}' L_{10} - d_0' \phi_{ij} + d_{10}' \phi_{i,j+2} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(A_{i,j+1}\, e_0')\, L_0 - (\bar{A}_{i,j+1}\, e_{10}')\, L_{10} + (A_{i,j+1}\, e_2' - A_{i,j+1} \cdot B_{i,j+1}\, f_2'$$

$$- \bar{A}_{i,j+1}\, e_2' + \bar{A}_{i,j+1} \cdot \bar{B}_{i,j+1}\, f_2')\, \phi_{i,j+1} - \bar{A}_{i,j+1} \cdot e_0'\, \phi_{ij}$$

$$+ (\bar{A}_{i,j+1}\, \bar{B}_{i,j+1}\, f_5' - A_{i,j+1} \cdot B_{i,j+1}\, f_5')\, \phi_{i+1,j+1}$$

$$+ (\bar{A}_{i,j+1}\, \bar{B}_{i,j+1}\, f_6' - A_{i,j+1}\, B_{i,j+1}\, f_6')\, \phi_{i-1,j+1} + A_{i,j+1}\, e_{10}'\, \phi_{i,j+2}$$

$$+ \alpha_{i,j+1}\, \theta_{i,j+1} - \bar{\alpha}_{i,j+1}\, \bar{\theta}_{i,j+1} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Une équation sera tirée à partir de ces trois équations qui contiennent deux valeurs fictives de la fonction de contraintes - à savoir : L_0 et L_{10} étant respectivement celles aux points (ij) et (i, j + 2).

Point qui se trouve un pas au dessus de l'interface

$$(A_{ij}\, g_{12} + 2\mu_{ij}\, f_{12})\cdot J_{12}$$
$$+(A_{ij}\, g_0 + 2\lambda_{ij}\, e_0 + 2\mu_{ij}\, f_0 + 2\eta_{ij}\, d_0 + \omega_{ij}\, b_0 + \gamma_{ij}\, c_0)\,\phi_{ij}$$
$$+(A_{ij}\, g_1 + 2\lambda_{ij}\, e_1 + 2\mu_{ij}\, f_1 + 2\eta_{ij}\, d_1 + \omega_{ij}\, b_1)\,\phi_{i+1,j}$$
$$+(A_{ij}\, g_2 + 2\lambda_{ij}\, e_2 + 2\mu_{ij}\, f_2 + 2\eta_{ij}\, d_2 + \gamma_{ij}\, c_2)\,\phi_{i,j+1}$$
$$+(A_{ij}\, g_3 + 2\lambda_{ij}\, e_3 + 2\mu_{ij}\, f_3 + 2\eta_{ij}\, d_3 + \omega_{ij}\, b_3)\,\phi_{i-1,j}$$
$$+(A_{ij}\, g_4 + 2\lambda_{ij}\, e_4 + 2\mu_{ij}\, f_4 + 2\eta_{ij}\, d_4 + \gamma_{ij}\, c_4)\,\phi_{i,j-1}$$
$$+(A_{ij}\, g_5 + 2\lambda_{ij}\, e_5 + 2\mu_{ij}\, f_5 + 2\eta_{ij}\, d_5)\,\phi_{i+1,j+1}$$
$$+(A_{ij}\, g_6 + 2\lambda_{ij}\, e_6 + 2\mu_{ij}\, f_6 + 2\eta_{ij}\, d_6)\,\phi_{i-1,j+1}$$
$$+(A_{ij}\, g_7 + 2\lambda_{ij}\, e_7 + 2\mu_{ij}\, f_7 + 2\eta_{ij}\, d_7)\,\phi_{i-1,j-1}$$
$$+(A_{ij}\, g_8 + 2\lambda_{ij}\, e_8 + 2\mu_{ij}\, f_8 + 2\eta_{ij}\, d_8)\,\phi_{i+1,j-1}$$
$$+(A_{ij}\, g_9 + 2\lambda_{ij}\, e_9)\,\phi_{i+2,j} + (A_{ij}\, g_{10} + 2\mu_{ij}\, f_{10})\,\phi_{i,j+2}$$
$$+(A_{ij}\, g_{11} + 2\lambda_{ij}\, e_{11})\,\phi_{i-2,j} + B_{ij} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$-a_0'\, J_0 + a_{12}'\, J_{12} + a_0'\,\phi_{ij} - a_{12}'\,\phi_{i,j-2} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$-\bar{A}_{i,j-1}\cdot b_0'\, J_0 + A_{i,j-1}\cdot b_{12}'\cdot J_{12} + A_{i,j-1}\, b_0'\,\phi_{ij}$$
$$+(A_{i,j-1}\, b_4' - A_{i,j-1}\, B_{i,j-1}\, c_4' + \bar{A}_{i,j-2}\cdot\bar{B}_{i,j-1}\, c_4' - \bar{A}_{i,j-1}\, b_4')\,\phi_{i,j-1}$$
$$+(\bar{A}_{i,j-1}\,\bar{B}_{i,j+1}\, c_7' - A_{i,j-1}\cdot B_{i,j-1}\, c_7')\,\phi_{i-1,j-1}$$
$$+(\bar{A}_{i,j-1}\,\bar{B}_{i,j-1}\, c_8' - A_{i,j-1}\, B_{i,j-1}\, c_8')\,\phi_{i+1,j-1} + (\bar{A}_{i,j-1}\, b_{12}')\,\phi_{i,j-2}$$
$$+\alpha_{i,j-1}\,\theta_{i,j-1} - \bar{\alpha}_{i,j-1}\,\bar{\theta}_{i,j-1} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

Une équation sera tirée à partir de ces trois équations qui contiennent deux valeurs fictives de la fonction de contrainte, à savoir : J_0, J_{12} étant respectivement celles aux points (i, j) et (i j - **2**).

point qui se trouve à l'interface

$$
\begin{aligned}
&+ (A_{ij}\, g_4 + 2\lambda_{ij}\, e_4 + 2\mu_{ij}\, f_4 + 2\eta_{ij}\, d_4 + \gamma_{ij}\, c_4)\, F_4 \\
&+ (A_{ij}\, g_7 + 2\lambda_{ij}\, e_7 + 2\mu_{ij}\, f_7 + 2\eta_{ij}\, d_7)\, F_7 \\
&+ (A_{ij}\, g_8 + 2\lambda_{ij}\, e_8 + 2\mu_{ij}\, f_8 + 2\eta_{ij}\, d_8)\, F_8 \\
&+ (A_{ij}\, g_{12} + 2\mu_{ij}\, f_{12})\, F_{12} \\
&+ (A_{ij}\, g_0 + 2\lambda_{ij}\, e_0 + 2\mu_{ij}\, f_0 + 2\eta_{ij}\, d_0 + \omega_{ij}\, b_0 + \gamma_{ij}\, c_0)\, \phi_{ij} \\
&+ (A_{ij}\, g_1 + 2\lambda_{ij}\, e_1 + 2\mu_{ij}\, f_1 + 2\eta_{ij}\, d_1 + \omega_{ij}\, b_1)\, \phi_{i+1,j} \\
&+ (A_{ij}\, g_2 + 2\lambda_{ij}\, e_2 + 2\mu_{ij}\, f_2 + 2\eta_{ij}\, d_2 + \gamma_{ij}\, c_2)\, \phi_{i,j+1} \\
&+ (A_{ij}\, g_3 + 2\lambda_{ij}\, e_3 + 2\mu_{ij}\, f_3 + 2\eta_{ij}\, d_3 + \omega_{ij}\, b_3)\, \phi_{i-1,j} \\
&+ (A_{ij}\, g_5 + 2\lambda_{ij}\, e_5 + 2\mu_{ij}\, f_5 + 2\eta_{ij}\, d_5)\, \phi_{i+1,j+1} \\
&+ (A_{ij}\, g_6 + 2\lambda_{ij}\, e_6 + 2\mu_{ij}\, f_6 + 2\eta_{ij}\, d_6)\, \phi_{i-1,j+1} \\
&+ (A_{ij}\, g_9 + 2\lambda_{ij}\, e_9)\, \phi_{i+2,j} + (A_{ij}\, g_{10} + 2\mu_{ij}\, f_{10})\, \phi_{i,j+2} \\
&+ (A_{ij}\, g_{11} + 2\lambda_{ij}\, e_{11})\, \phi_{i-2,j} + B_{ij} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\bar{A}_{ij}\, g_2 + 2\bar{\lambda}_{ij} + 2\mu_{ij}\, f_2 + 2\bar{\eta}_{ij}\, d_2 + \bar{\gamma}_{ij}\, c_2)\, F_2 \\
&+ (\bar{A}_{ij}\, g_5 + 2\bar{\lambda}_{ij}\, e_5 + 2\bar{\mu}_{ij}\, f_5 + 2\bar{\eta}_{ij}\, d_5)\, F_5 \\
&+ (\bar{A}_{ij}\, g_6 + 2\bar{\lambda}_{ij}\, e_6 + 2\bar{\mu}_{ij}\, f_6 + 2\bar{\eta}_{ij}\, d_6)\, F_6 + (\bar{A}_{ij}\, g_{10} + 2\bar{\mu}_{ij}\, f_{10})\, F_{10} \\
&+ (\bar{A}_{ij}\, g_0 + 2\bar{\lambda}_{ij}\, e_0 + 2\bar{\mu}_{ij}\, f_0 + 2\bar{\eta}_{ij}\, d_0 + \bar{\omega}_{ij}\, b_0 + \bar{\gamma}_{ij}\, c_0)\, \phi_{ij} \\
&+ (\bar{A}_{ij}\, g_1 + 2\bar{\lambda}_{ij}\, e_1 + 2\bar{\mu}_{ij}\, f_1 + 2\bar{\eta}_{ij}\, d_1 + \bar{\omega}_{ij}\, b_1)\, \phi_{i+1,j} \\
&+ (\bar{A}_{ij}\, g_3 + 2\bar{\lambda}_{ij}\, e_3 + 2\bar{\mu}_{ij}\, f_3 + 2\bar{\eta}_{ij}\, d_3 + \bar{\omega}_{ij}\, b_3)\, \phi_{i-1,j} \\
&+ (\bar{A}_{ij}\, g_4 + 2\bar{\lambda}_{ij}\, e_4 + 2\bar{\mu}_{ij}\, f_4 + 2\bar{\eta}_{ij}\, d_4 + \bar{\gamma}_{ij}\, c_4)\, \phi_{i,j-1} \\
&+ (\bar{A}_{ij}\, g_7 + 2\bar{\lambda}_{ij}\, e_7 + 2\bar{\mu}_{ij}\, f_7 + 2\bar{\eta}_{ij}\, d_7)\, \phi_{i-1,j-1} \\
&+ (\bar{A}_{ij}\, g_8 + 2\bar{\lambda}_{ij}\, e_8 + 2\bar{\mu}_{ij}\, f_8 + 2\bar{\eta}_{ij}\, d_8)\, \phi_{i+1,j-1} \\
&+ (\bar{A}_{ij}\, g_9 + 2\bar{\lambda}_{ij}\, e_9)\, \phi_{i+2,j} + (\bar{A}_{ij}\, g_{11} + 2\bar{\lambda}_{ij}\, e_{11})\, \phi_{i-2,j} \\
&+ (\bar{A}_{ij}\, g_{12} + 2\bar{\mu}_{ij}\, f_{12})\, \phi_{i,j-2} + \bar{B}_{ij} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)
\end{aligned}
$$

$$-a_2 F_2 + a_4 F_4 + a_2 \phi_{i,j+1} - a_4 \phi_{i,j-1} = \quad = 0 \quad \cdots\cdots (3)$$

$$-a_6 F_6 + a_7 F_7 + a_6 \phi_{i-1,j+1} - a_7 \phi_{i-1,j-1} = 0 \quad \cdots\cdots (4)$$

$$-a_5 F_5 + a_8 F_8 + a_5 \phi_{i+1,j+1} - a_8 \phi_{i+1,j-1} = 0 \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\begin{aligned} &-\bar{A}_{ij} c_2 F_2 + A_{ij} c_4 F_4 + (A_{ij} c_0 - A_{ij} B_{ij} b_0 - \bar{A}_{ij} c_0 + \bar{A}_{ij} \bar{B}_{ij} b_0) \phi_{ij} \\ &+ (\bar{A}_{ij} \bar{B}_{ij} b_1 - A_{ij} B_{ij} b_1) \phi_{i+1,j} + A_{ij} c_2 \phi_{i,j+1} \\ &+ (\bar{A}_{ij} \bar{B}_{ij} b_3 - A_{ij} B_{ij} b_3) \phi_{i-1,j} - A_{ij} c_4 \phi_{i,j-1} \\ &+ \alpha_{ij} \theta_{ij} - \bar{\alpha}_{ij} \bar{\theta}_{ij} = 0 \cdots\cdots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-\bar{A}_{i-1,j} c_6 F_6 + A_{i-1,j} c_7 F_7 + (\bar{A}_{i-1,j} \bar{B}_{i-1,j} l_0 - A_{i-1,j} B_{i-1,j} l_0) \phi_{ij} \\ &+ (A_{i-1,j} c_5 - A_{i-1,j} B_{i-1,j} l_3 - \bar{A}_{i-1,j} c_3 + \bar{A}_{i-1,j} \bar{B}_{i-1,j} l_3) \phi_{i-1,j} \\ &+ (A_{i-1,j} c_6) \phi_{i-1,j+1} + (-\bar{A}_{i-1,j} c_7) \phi_{i-1,j-1} \\ &+ (\bar{A}_{i-1,j} \bar{B}_{i-1,j} l_{11} - A_{i-1,j} B_{i-1,j} l_{11}) \phi_{i-2,j} \\ &+ \alpha_{i-1,j} \cdot \theta_{i-1,j} - \bar{\alpha}_{i-1,j} \cdot \bar{\theta}_{i-1,j} = 0 \cdots\cdots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-\bar{A}_{i+1,j} \cdot c_5 F_5 + A_{i+1,j} c_8 F_8 \\ &+ (\bar{A}_{i+1,j} \bar{B}_{i+1,j} \cdot z_0 - A_{i+1,j} B_{i+1,j} z_0) \phi_{ij} \\ &+ (A_{i+1,j} c_1 - A_{i+1,j} B_{i+1,j} z_1 - \bar{A}_{i+1,j} c_1 + \bar{A}_{i+1,j} B_{i+1,j} z_1) \phi_{i+1,j} \\ &+ (A_{i+1,j} c_5) \phi_{i+1,j+1} - \bar{A}_{i+1,j} c_8 \phi_{i+1,j-1} \\ &+ (\bar{A}_{i+1,j} B_{i+1,j} z_9 - A_{i+1,j} B_{i+1,j} z_9) \phi_{i+2,j} \\ &+ \alpha_{i+1,j} \theta_{i+1,j} - \bar{\alpha}_{i+1,j} \theta_{i+1,j} = 0 \quad \cdots\cdots (8) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(-\bar{A}_{ij}\, h_2 - \bar{\xi}_{ij}\, k_2 - \bar{\mu}_{ij}\, c_2 + 2\bar{\rho}_{ij}\, d_2)\, F_2 \\
&+ (A_{ij}\, h_4 + \xi_{ij}\, k_4 + 2\rho_{ij}\, d_4 + \mu_{ij}\, c_4)\, F_4 \\
&+ (-\bar{\xi}_{ij}\, k_5 - 2\bar{\rho}_{ij}\, d_5)\, F_5 + (-\bar{\xi}_{ij}\, k_6 - 2\bar{\rho}_{ij}\, d_6)\, F_6 \\
&+ (\xi_{ij}\, k_7 - 2\rho_{ij}\, d_7)\, F_7 + (\xi_{ij}\, k_8 + 2\rho_{ij}\, d_8)\, F_8 - \bar{A}_{ij}\, h_{10}\, F_{10} \\
&+ A_{ij}\, h_{12}\, F_{12} + (A_{ij}\, h_0 + \xi_{ij}\, k_0 + 2\rho_{ij}\, d_0 + \mu_{ij}\, c_0 - B_{ij}\, \mu_{ij}\, b_0 \\
&\quad - \bar{A}_{ij}\, h_0 - \bar{\xi}_{ij}\, k_0 - 2\bar{\rho}_{ij}\, d_0 - \bar{\mu}_{ij}\, c_0 + \bar{B}_{ij}\, \bar{\mu}_{ij}\, b_0)\, \phi_{ij} \\
&+ (\xi_{ij}\, k_1 + 2\rho_{ij}\, d_1 - B_{ij}\, \mu_{ij}\, b_1 - \bar{\xi}_{ij}\, k_1 - 2\bar{\rho}_{ij}\, d_1 + \bar{B}_{ij}\, \bar{\mu}_{ij}\, b_1)\, \phi_{i+1,j} \\
&+ (A_{ij}\, h_2 + \xi_{ij}\, k_2 + 2\rho_{ij}\, d_2 + \mu_{ij}\, c_2)\, \phi_{i,j+1} \\
&+ (\xi_{ij}\, k_3 + 2\rho_{ij}\, d_3 - B_{ij}\, \mu_{ij}\, b_3 - \bar{\xi}_{ij}\, k_3 - 2\bar{\rho}_{ij}\, d_3 + \bar{B}_{ij}\, \bar{\mu}_{ij}\, b_3)\, \phi_{i-1,j} \\
&+ (-\bar{A}_{ij}\, h_4 - \bar{\xi}_{ij}\, k_4 - 2\bar{\rho}_{ij}\, d_4 - \mu_{ij}\, c_4)\, \phi_{i,j-1} \\
&+ (\xi_{ij}\, k_5 + 2\rho_{ij}\, d_5)\, \phi_{i+1,j+1} + (\xi_{ij}\, k_6 + 2\rho_{ij}\, d_6)\, \phi_{i-1,j+1} \\
&+ (-\bar{\xi}_{ij}\, k_7 - 2\rho_{ij}\, d_7)\, \phi_{i-1,j-1} + (-\bar{\xi}_{ij}\, k_8 - 2\bar{\rho}_{ij}\, d_8)\, \phi_{i+1,j-1} \\
&+ A_{ij}\, h_{10} \cdot \phi_{i,j+2} + (-\bar{A}_{ij}\, h_{12})\, \phi_{i,j-2} + \delta_{ij} - \bar{\delta}_{ij} = 0 \qquad \cdots\cdots (9)
\end{aligned}
$$

Une équation sera tirée à partir de ces neuf équations qui contiennent 8 valeurs fictives de la fonction de contrainte F_2 F_4 F_5 F_6 F_7 F_8 F_{10} F_{12}, relatives respectivement aux points : (i, j + 1), (i, j - 1), (i + 1, j + 1), (i - 1, j - 1), (i - 1, j - 1), (i + 1, j + 1) (i, j + 2), (i, j - 2).

onditions aux limites :

) $\phi_{ij} = 0$ sur les bords libres

i) $\phi_{ij} = \left(\frac{m^2}{n^2}\right) \cdot \phi_{i+2,j}$ aux points qui se trouvent en dehors des bords libres parallèles à l'axe des y

i) $\phi_{ij} = \left(\frac{q^2}{p^2}\right) \cdot \phi_{i,j+2}$ aux points qui se trouve en dehors des bords libres parallèles à l'axe des x .

v) $\phi_{ij} = \phi_{i+2,j-2}$ aux points à l'extérieur aux coins de l'interface (Maillage carré)

Calcul des Contraintes

$$(\sigma_{xx})_{ij} = c_0 \phi_{ij} + c_2 \phi_{i,j+1} + c_4 \phi_{i,j-2} \quad \text{bars}$$

$$(\sigma_{yy})_{ij} = b_0 \phi_{ij} + b_1 \phi_{i+1,j} + b_3 \phi_{i-1,j} \quad \text{bars}$$

$$(\sigma_{xy})_{ij} = (d_0 \phi_{ij} + d_1 \phi_{i+1,j} + d_2 \phi_{i,j+1} + d_3 \phi_{i-1,j} + d_4 \phi_{i,j-1} + d_5 \phi_{i+1,j+1} + d_6 \phi_{i-1,j+1} + d_7 \phi_{i-1,j-1} + d_8 \phi_{i+1,j-1}) \quad \text{bars}$$

On fait intervenir les valeurs fictives respectives de la fonction des contraintes au calcul des contraintes à chaque rive des interfaces.

SYMBOLES UTILISES DANS L'ANNEXE

Les symboles A, B, λ, μ, η, ω, γ, ξ, ρ, δ, β signifient des fonctions des caractéristiques mécaniques ou thermiques du milieu plan. Ils portent des indices repérant les coordonnées des points auxquels la valeur de la fonction est évaluée. Par exemple A_{ij} est la valeur de la réciproque du module d'élasticité au point (ij).

$$A = \frac{1}{E}$$

$$\lambda = \nu$$

$$\mu = \frac{\partial A}{\partial y}$$

$$\eta = \frac{\partial^2 (A + AB)}{\partial x \partial y}$$

$$\omega = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (AB)}{\partial y^2}$$

$$\gamma = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 AB}{\partial x^2}$$

$$\xi = 2A + AB$$

$$\rho = \frac{\partial}{\partial x} (A + AB)$$

$$\delta \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \alpha\theta)$$

$$\beta = \nabla^2 \quad \alpha\theta$$

Coefficients

$$a_o = a_1 = a_3 = -\frac{q - p}{pq\varepsilon}$$

$$a_2 = a_5 = a_6 = \frac{q}{p\,(p + q)\varepsilon}$$

$$a_4 = a_7 = a_8 = \frac{-p}{q\,(p + q)\varepsilon}$$

$$b_o = c'_4 = -\frac{2}{m\,n\,\varepsilon^2}$$

$$b_1 = c'_8 = \frac{2}{n\,(m + n)\varepsilon^2}$$

$$b_3 = c'_7 = \frac{2}{m\,(m + n)\,\varepsilon^2}$$

$$c_o = c_1 = c_3 = -\frac{2}{pq\varepsilon^2}$$

$$c_2 = c_5 = c_6 = \frac{2}{p\,(p + q)\varepsilon^2}$$

$$c_4 = c_7 = c_8 = \frac{2}{q\,(p + q)\varepsilon^2}$$

$$d_o = \frac{(m - n)\,(q - p)}{m\,n\,p\,q\,\varepsilon^2}$$

$$d_1 = \frac{-m\,(q - p)}{m\,p\,q\,(m + n)\varepsilon^2}$$

$$d_2 = \frac{-q\,(m - n)}{m\,n\,p\,(p + q)\varepsilon^2}$$

$$d_3 = \frac{n\,(q - p)}{m\,p\,q\,(m + n)\varepsilon^2} \quad ; \quad d_4 = \frac{p\,(m - n)}{m\,n\,q\,(p + q)\varepsilon^2}$$

$$d_5 = \frac{m\,q}{np(p + q)\,(m + n)\varepsilon^2} \quad ; \quad d_6 = \frac{n\,q}{mp\,(p + q)\,(m + n)\varepsilon^2}$$

$$d_7 = \frac{n\,p}{m\,q(p + q)\,(m + n)\varepsilon^2} \quad ; \quad d_8 = \frac{-m\,p}{nq\,(p + q)\,(m + n)\varepsilon^2}$$

$$e_0 = \frac{1}{m\,n\,\varepsilon^3\,(m+n)}\left[\frac{2\,m^2}{n\,(n+r)} - \frac{2\,n^2}{m\,(m+t)} + \frac{2\,(m^2-n^2)}{1}\cdot\left(\frac{1}{mn} + \frac{1}{pq}\right)\right]$$

$$e_1 = \frac{-2}{m\,n\,\varepsilon^3\,(m+n)}\left[m^2\left(\frac{1}{nr} + \frac{1}{pq}\right) + \frac{m-n}{n}\right]$$

$$e_2 = -\frac{2\,(m^2-n^2)}{p\,(p+q)\,mn\,(m+n)\varepsilon^3}$$

$$e_3 = \frac{2}{m\,n\,\varepsilon^3\,(m+n)}\left[n^2\left(\frac{1}{mt} + \frac{1}{pq}\right) - \frac{m-n}{m}\right]$$

$$e_4 = -\frac{2\,(m-n)}{m\,n\,q\,(p+q)\varepsilon^3}$$

$$e_5 = \frac{2\,m}{n\,p\,(m+n)\,(p+q)\varepsilon^3} \quad ; \quad e_6 = -\frac{2\,n}{m\,p\,\varepsilon^3\,(m+n)\,(p+q)}$$

$$e_7 = -\frac{2\,n}{m\,q\,\varepsilon^3\,(m+n)\,(p+q)} \quad ; \quad e_8 = \frac{2\,m}{n\,q\,\varepsilon^3\,(m+n)\,(p+q)}$$

$$e_9 = \frac{2\,m}{n\,r\,(m+n)\,(n+r)\varepsilon^3}$$

$$e_{11} = \frac{2\,n}{m\,t\,\varepsilon^3\,(m+n)\,(m+t)}$$

$$f_0 = \frac{2}{p\,q\,(p+q)\varepsilon^3}\left[\frac{q^2}{p\,(p+s)} - \frac{p^2}{q\,(q+u)} + \frac{(q^2-p^2)}{1}\left(\frac{1}{mn} + \frac{1}{pq}\right)\right]$$

$$f_1 = -\frac{2\,(q-p)}{p\,q\,n\,(m+n)\varepsilon^3}$$

$$f_2 = -\frac{2}{p\,q\,(p+q)\varepsilon^3}\left[q^2\left(\frac{1}{mn} + \frac{1}{ps}\right) + \frac{q-p}{p}\right]$$

$$f_3 = -\frac{2\,(q-p)}{p\,q\,m\,(m+n)\varepsilon^3}$$

$$f_4 = \frac{2}{p\,q\,(r+q)\varepsilon^3}\left[p^2\left(\frac{1}{mn}+\frac{1}{qu}\right)-\frac{q-p}{q}\right]$$

$$f_5 = \frac{2\,q}{p\,n\,(p+q)\,(m+n)\varepsilon^3} \quad ; \quad f_6 = \frac{2\,q}{p\,m\,(p+q)\,(m+n)\varepsilon^3}$$

$$f_7 = -\frac{2\,p}{q\,m\,(m+n)\,(p+q)\varepsilon^3} \quad ; \quad f_8 = -\frac{2\,p}{q\,n\,(m+n)\,(p+q)\varepsilon^3}$$

$$f_{10} = \frac{2\,q}{p\,q\,(p+q)\,(p+s)\varepsilon^3}$$

$$f_{12} = \frac{-2\,p}{q\,u\,(p+q)\,(q+u)\varepsilon^3}$$

$$f_0 = \frac{4}{\varepsilon^4}\left[\frac{1}{n^2\,(m+n)\,(n+r)}+\frac{1}{m^2\,(m+n)\,(m+t)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p^2\,(p+q)\,(p+s)}+\frac{1}{q^2\,(p+q)\,(q+u)}+\left(\frac{1}{mn}+\frac{1}{pq}\right)^2\right]$$

$$f_1 = \frac{-4}{\varepsilon^4}\left[\frac{1}{n\,(m+n)}\left(\frac{1}{nr}+\frac{1}{pq}\right)+\frac{1}{n\,(m+n)}\left(\frac{1}{mn}+\frac{1}{pq}\right)\right]$$

$$f_2 = \frac{-4}{\varepsilon^4}\left[\frac{1}{p\,(p+q)}\left(\frac{1}{mn}+\frac{1}{ps}\right)+\frac{1}{p\,(p+q)}\left(\frac{1}{mn}+\frac{1}{pq}\right)\right]$$

$$f_3 = \frac{-4}{\varepsilon^4}\left[\frac{1}{m\,(m+n)}\left(\frac{1}{mt}+\frac{1}{pq}\right)+\frac{1}{m\,(m+n)}\left(\frac{1}{mn}+\frac{1}{pq}\right)\right]$$

$$f_4 = \frac{-4}{\varepsilon^4\,q\,(p+q)}\left[\frac{2}{mn}+\frac{1}{qu}+\frac{1}{pq}\right]$$

$$g_5 = \frac{8}{\varepsilon^4\, p\, n\, (m+n)\, (p+q)}$$

$$g_6 = \frac{8}{\varepsilon^4\, p\, m\, (m+n)\, (p+q)}$$

$$g_7 = \frac{8}{\varepsilon^4\, (m+n)\, (p+q)\, m\, q}$$

$$g_8 = \frac{8}{\varepsilon^4\, n\, q\, (m+n)\, (p+q)}$$

$$g_9 = \frac{4}{\varepsilon^4\, (m+n)\, (n+r)\, n\, r}$$

$$g_{10} = \frac{4}{\varepsilon^4\, p\, s\, (p+q)\, (p+s)}$$

$$g_{11} = \frac{4}{\varepsilon^4\, m\, t\, (m+n)\, (m+t)}$$

$$g_{12} = \frac{4}{\varepsilon^4\, q\, u\, (p+q)\, (q+u)}$$

$$h_o = \frac{2}{\varepsilon^3\, p\, q\, (p+q)} \left[\frac{q^2}{p\,(p+s)} - \frac{p^2}{q\,(q+u)} + \frac{q^2 - p^2}{p\, q} \right]$$

$$h_2 = -\frac{2}{p\, q\, (p+q)\, \varepsilon^3} \left[\frac{q-p}{p} + \frac{q^2}{p\, s} \right]$$

$$h_4 = \frac{2}{p\, q\, (p+q)\, \varepsilon^3} \left[\frac{p^2}{q\, u} - \frac{q-p}{q} \right]$$

$$h_{10} = \frac{2\, q}{p\, s\, (p+q)\, (p+s)\, \varepsilon^3}$$

$$h_{12} = \frac{2\, p}{q\, u\, (p+q)\, (q+u)\, \varepsilon^3}$$

$$k_0 = \frac{2\,(q - p)}{m\ n\ p\ q\ \varepsilon^3}$$

$$k_1 = -\frac{2\,(q - p)}{p\ q\ n\ (m + n)\ \varepsilon^3}$$

$$k_2 = -\frac{2\ q}{p\ m\ n\ (p + q)\ \varepsilon^3}$$

$$k_3 = -\frac{2\,(q - p)}{p\ q\ m\ (m + n)\ \varepsilon^3}$$

$$k_4 = \frac{2\ p}{q\ m\ n\ (p + q)\ \varepsilon^3}$$

$$k_5 = \frac{2\ q}{p\ n\ (p + q)\ (m + n)\ \varepsilon^3}$$

$$k_6 = \frac{2\ q}{p\ m\ (p + q)\ (m + n)\ \varepsilon^3}$$

$$k_7 = -\frac{2\ p}{q\ m\ (p + q)\ (m + n)\ \varepsilon^3}$$

$$k_8 = -\frac{2\ p}{q\ n\ (p + q)\ (m + n)\ \varepsilon^3}$$

$$l_0 = \frac{2}{m\ (m + t)\ \varepsilon^2}$$

$$l_3 = -\frac{2}{m\ t\ \varepsilon^2}$$

$$l_{11} = \frac{2}{t\ (m + t)\ \varepsilon^2}$$

$$z_0 = \frac{2}{n\ (n + r)\ \varepsilon^2}$$

$$z_1 = -\frac{2}{n\ r\ \varepsilon^2}$$

$$z_9 = \frac{2}{r\ (n + r)\ \varepsilon^2}$$

$$a'_0 = \frac{u}{q\,(q+u)\,\varepsilon} \qquad b'_0 = \frac{2}{q\,(q+u)\,\varepsilon^2}$$

$$a'_4 = -\frac{(u-q)}{q\,u\,\varepsilon} \qquad b'_4 = -\frac{2}{q\,u\,\varepsilon^2}$$

$$a'_{12} = -\frac{q}{u\,(q+u)\,\varepsilon} \qquad b'_{12} = \frac{2}{u\,(q+u)\,\varepsilon^2}$$

$$c'_1 = -\frac{2}{m\,n\,\varepsilon^2}$$

$$c'_7 = \frac{2}{m\,(m+n)\,\varepsilon^2}$$

$$c'_8 = \frac{2}{n\,(p+n)\,\varepsilon^2}$$

$$d'_0 = -\frac{s}{p\,(p+s)\,\varepsilon}$$

$$d'_2 = -\frac{(p-s)}{p\,s\,\varepsilon}$$

$$d'_{10} = +\frac{p}{s\,(p+s)\,\varepsilon}$$

$$e'_0 = \frac{2}{p\,(p+s)\,\varepsilon^2} \quad ; \quad e'_2 = -\frac{2}{p\,s\,\varepsilon^2}$$

$$e'_{10} = \frac{2}{s\,(p+s)\,\varepsilon^2}$$

$$c'_2 = -\frac{2}{m\,n\,\varepsilon^2}$$

$$c'_5 = \frac{2}{n\,(m+n)\,\varepsilon^2} \quad ; \quad c'_6 = \frac{2}{m\,(m+n)\,\varepsilon^2}$$

$$g'_0 = - \frac{r}{n\,(n + r)\,\varepsilon}$$

$$g'_9 = \frac{n}{r\,(n + r)\,\varepsilon}$$

$$h'_0 = - \frac{s}{p\,(p + s)\,\varepsilon}$$

$$h'_{10} = \frac{p}{s\,(p + s)\,\varepsilon}$$